Volume-10| Issue-12| 2022 Research Article

# ТОПОЛОГИЧИСКИЕ ИГРЫ “БРЮССЕЛЬСКАЯ КАПУСТА” НА ПОВЕРХНОСТИ ТОРА В КОТОРОМ ХАРАКТЕРИСТИКА ЭЙЛЕРА РАВНА $\chi = 2 - 2g$.

https://doi.org/10.5281/zenodo.7452796

**Жабборов Мухаммади Мусурмон ўғли**
*Старший преподаватель кафедры “Общей математики” ТГПУ им. Низами*
*muxammadijm@mail.ru*
**Мухаммадиев Самариддин Боймурод ўғли**
*Магистрант ТГПУ им. Низами*


**Abstract:** Теория топологических игр относится к наукам геометрия и топология, это исследования считается фундаментальным исследованием. В данной статье показано топологичиские игры “Брюссельская капуста” на поверхности тора в котором характеристика эйлера равна .

**Keywords:** игра, играющий, покрытия, топологические игры, позиции.

Received: 15-12-2022
Accepted: 17-12-2022
Published: 22-12-2022

**About:** FARS Publishers has been established with the aim of spreading quality scientific information to the research community throughout the universe. Open Access process eliminates the barriers associated with the older publication models, thus matching up with the rapidity of the twenty-first century.

**Abstract:** The theory of topological games belongs to the sciences of geometry and topology, this research is considered fundamental research. This article shows the topological “Brussels sprout” games on the surface of a torus..

**Keywords:** игра, играющий, покрытия, топологические игры, позиции. game, playing, cover, topological game, position, torus.

Received: 15-12-2022
Accepted: 17-12-2022
Published: 22-12-2022

**About:** FARS Publishers has been established with the aim of spreading quality scientific information to the research community throughout the universe. Open Access process eliminates the barriers associated with the older publication models, thus matching up with the rapidity of the twenty-first century.

## ВВЕДЕНИЕ

Термин топологическая игра был впервые введен Берге [2], который определил основные идеи и формализм по аналогии с топологическими группами. Оказывается, что некоторые фундаментальные топологические конструкции имеют естественный аналог в топологических играх, примеры из них свойство Бэра, бэровские пространства, полнота и свойства сходимости, свойства разделения, покрытия, непрерывные образы, множества Суслина, и сингулярное разложение. В то же время, некоторые топологические свойства, которые возникают естественным образом в топологических играх могут быть обобщены за пределы теоретика - игровой контекст в силу этой двойственности, топологические игры широко используются для описания новых свойств топологических пространств.

Эта игра начинается с обозначения n точек на поверхности тора. В игре участвуют два игрока и каждый из них в очередном ходу или соединяет обозначенные две точки или из одного этих точек проводит замкнутую петлю, возвращающуюся в исходную точку, и затем ставит на проведенной линии новую точку.

Правила игры следующие:

1) линия может иметь любой вид, но не должна иметь точек самопересечения, пересекать ранее проведенные линии или проходить, через ранее поставленные точки, не служащие ее началом и концом;

2) из начальных точек и из каждой новой проставленной точки должно выходить не более четырех линий. Играющие по очереди проводят линии. Победителем считается тот, кто сумеет провести последнюю линию.

Нам известно, что путем склеивания прямого четырехугольника как в рисунке 1 можно создать тор.

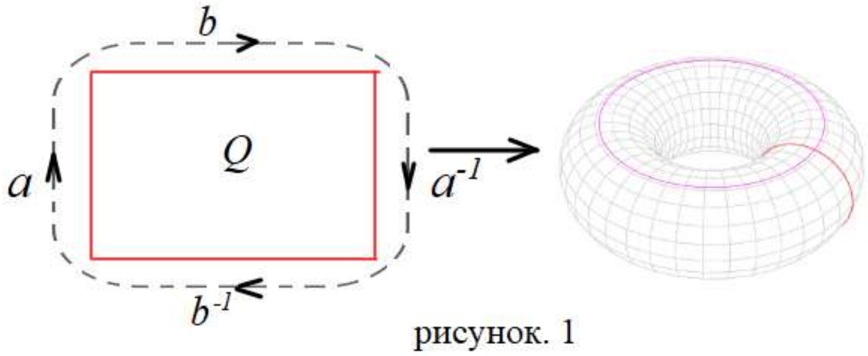


рисунок. 1

Начинать игру на поверхности тора сложнее, поэтому игру будем вести в прямом четырехугольнике, указанным выше.

**Теорема.** Для игры ***"брюссельская капуста"***, начинающаяся с n точек на поверхности тора всегда $5n-2 \le m \le 5n$.

**Доказательство теорема.** первая часть теоремы ясно, то есть мы знаем, что $m=5n-2$. Потому что, если игра происходит в какой то закрытой части поверхности, это значит, игра происходит на плоскости

Нам известно, игра на плоскости заканчивается $m=5n-2$ шагов

Докажем вторую часть теоремы. Игру будем вести по всей поверхности тора (рисунке 2)

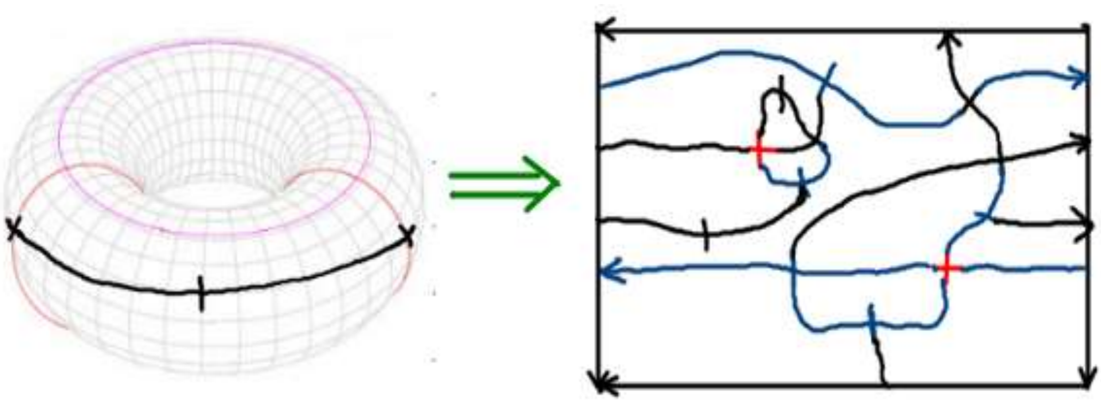

рисунок. 2

Ниже приведем известные утверждения:

1. По условию игры в конце получается граф с вершинами $V_{number} = m + n$, так как игра начинается с $n$ точек – вершин и за $m$ шагов добавляется $m$ точек-вершин.

2. В конце игры полученный граф имеет $R_{number} = 2m$ ребро, так как на каждом шаге добавляется два ребра.

3. В конце игры полученный граф имеет $G_{number} = 4n$ грани.

Докажем 3 утверждение: В полученном графе каждой грани в некоторой точке остается единственное открытое направление. Если число открытых направлений обозначим через $S$, тогда число граней графа будет $G_{number} = S$. Если через $S(n)$, обозначим число всевозможных направлений, то $S(n) = 4n + 2m$, так как игра начинается с $3n$ направлением и за каждый шаг добавляется $2$ направления. С другой стороны в каждом шаге соединяется $2$ направления, значит $S = S(n) - 2m$. Отсюда имеем $S = S(n) - 2m = 3n + 2m - 2m = 3n,\ G_{number} = S = 3n$. Теперь найдем связь между $n$ и $m$. По теореме Эйлера для тора имеет место следующее равенство $V_{number} + G_{number} - R_{number} = 0$. Значит,

$$V_{number} + G_{number} - R_{number} = 0 \quad \Rightarrow \quad (n + m) + (4n) - (2m) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$5n - m = 0 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad m = 5n$$

Теорема доказана.

Итак, для числа $m$ нижний рубеж $m = 5n - 2$, а верхний рубеж $m = 5n$, из этого следует $5n - 2 \le m \le 5n$. [3]

Теперь рассмотрим эту игру на поверхности тора, в котором характеристика Эйлера равна $\chi = 2 - 2g$

**Teorema:** Для игры, начинающееся с $n$ точек на поверхности тора, в котором характеристика Эйлера равна $\chi = 2 - 2g$ всегда $5n - 2 \le m \le 5n + 2g - 2$

**Доказательство:** Ясно, что $m = 5n - 2$ **,** потому что если игра происходит в какой то закрытой части поверхности, это значит игра происходит на плоскости. Нам известно, что на плоскости игра заканчивается через $m = 5n - 2$ ходов.

Находим верхний предел неравенства. Игру будем вести по всей поверхности тора, в которой характеристика Эйлера равна $\chi = 2 - 2g$ .

Ниже приведем известные утверждения:

1. По условию игры в конце получается граф с вершинами $V_{number} = n + m$, так как игра начинается с $n$ точек – вершин и за $m$ шагов добавляется $m$ точек-вершин.

2. В конце игры полученный граф имеет $R_{number} = 2m$ ребро, так как на каждом шаге добавляется два ребра.

3. В конце игры полученный граф имеет $G_{number} = 4n$ грани.

Докажем 3 утверждение: В полученном графе каждой грани в некоторой точке остается единственное открытое направление. Если число открытых направлений обозначим через $S$, тогда число граней графа будет $G_{number} = S$. Если через $S(n)$ обозначим число всевозможных направлений, то $S(n) = 4n + 2m$, так как игра начинается с $3n$ направлением и за каждый шаг добавляется $2$ направления. С другой стороны в каждом шаге соединяется $2$ направления, то есть убавляется 2 направления, значит $S = S(n) - 2m$. Отсюда имеем $S = S(n) - 2m = 4n + 2m - 2m = 4n \Rightarrow S = G_{number} = 4n$. Теперь найдем связь между $n$ и $m$. По теореме Эйлера для тора имеет место следующее равенство $V_{number} + G_{number} - R_{number} = 2 - 2g$. Значит,

$$V_{number} + G_{number} - R_{number} = 2 - 2g \Rightarrow (n+m) + (4n) - (2m) = 2 - 2g \Rightarrow$$
$$5n - m = 2 - 2g \Rightarrow \Rightarrow m = 5n + 2g - 2$$

Итак, для числа $m$ нижний предел $m = 5n - 2$, а верхний рубеж $m = 5n + 2g - 2$, из этого следует $5n - 2 \le m \le 5n + 2g - 2$

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Теория топологических игр относится к наукам геометрии и топологии. В данной статье рассмотрены вопросы касающееся исследование топологических игры Брюссельскоя капуста на поверхности тора. Проблема исследование решается теорией топологических игр и методами топологии.

## ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Маматов М.Ш., Жабборов М.М. Топологические игры двух лиц о разделении пространств рассада и брюссельская капуста. “Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук ”. Москва. -2016.- №5.- С. 16-19.

2. Berge C. Topological games with perfect information. Contributions to the theory of games, vol. 3, 165–178. Annals of Mathematics Studies, no. 39.Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.

3. Жабборов М.М., Муҳаммадиев С.Б., Топологичиские игры “брюссельская капуста” на поверхности тора. “Innovative Development in Educational Activities (IDEA)” 2022 №5. https://doi.org/10.5281/zenodo.7366423

4. Gardner M. Mathematical Games, Scientific Amer. 197 (1957).

5. Berlekamp E., Conway J., Guy R.Winning Ways for your Mathematical Plays, Vol. I and II, Academic Press, (1982).

6. Delucchi E., Gaiffi G., Pernazza L. Giochi e percorsi matematici, Springer, 2012.

7. Telgarsky R. Topological games and analytic sets, Houston J. Math. 3 (1977), 549-553.

8. Ulam S.M. Combinatorial analysts in infinite sets and some physical theories, SIAM Rev. 6(1964) 343-355.

9. Lachlan A.L. On some games which are relevant to the theory of recursively enumerable sets, Ann. of Math. 91 (1970), 291-310.