Volume-10| Issue-12| 2022 **Research Article**

“РЕШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЕ СВЕДЕНИЕМ ЕЁ К УРАВНЕНИЮ ГЕЛФАНДА-ЛЕВИТАНА ВТОРОГО РОДА

https://doi.org/10.5281/zenodo.7468292

Исламов Эркинжон Ревкатович
Ферганский государственный университет кафедра прикладной математики и информатики,
Мамадалиева Шахноза Гайратовна
Ферганский государственный университет, магистрантка 2 курса

Abstract: Настоящая работа посвящена решению коэффициентной обратной задачи для одномерных дифференциальных уравнений гиперболического типа сведением их к интегральному уравнению Гельфанда-Левитана.

Keywords: Обратная задача, уравнения гиперболического типа, уравнение Гельфанда-Левитана второго рода..

Received: 19-12-2022
Accepted: 20-12-2022
Published: 22-12-2022

About: FARS Publishers has been established with the aim of spreading quality scientific information to the research community throughout the universe. Open Access process eliminates the barriers associated with the older publication models, thus matching up with the rapidity of the twenty-first century.

Введение и постановка задачи

Вопросы об однозначном восстановлении оператора Штурма-Лиувилля по его спектральным характеристикам на дифференциальном уровне рассматривались многими авторами [1-7]. Разрешимость обратной задачи Штурма-Лиувилля и конструктивный способ построения оператора были предложены И.М.Гельфандом и Б.М.Левитаном [1]. Таким образом, алгоритм восстановления оператора Штурма-Лиувилля по спектральным характеристикам получил название метода Гельфанда-Левитана. Согласно методу ядро оператора преобразования, связанное с коэффициентом оператора Штурма-Лиувилля, удовлетворяет интегральному уравнению. Вспомогательная функция для определения ядра находится через спектральные данные оператора Штурма -Лиувилля.

Прямая задача с сосредоточенным источником состоит в нахождении обобщенного решения $u(x,t)$ задачи Коши [8,9]

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in R, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x) \tag{2}$$

где $\delta(x)$ - дельта функция Дирака. В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $q(x)$ по дополнительной информации о решении прямой задачи (1), (2)

$$u(0,t)=r(t),\ \ u_x(0,t)=0,\ t\geq 0. \tag{3}$$

2. Сведение коэффициентной обратной задачи к уравнению Гельфанда-Левитана второго рода

Лемма.1 Если ω решение вспомогательной задачи Коши

$$\omega_{tt}=\omega_{xx}-q(x)\omega, x>0, t\in R, \tag{4}$$

$$\omega|_{x=0}=\delta(t),\ \ \omega_x|_{x=0}=0. \tag{5}$$

то равенство

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)\omega(x,t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} r(t-\tau)\omega(x,\tau)d\tau \tag{6}$$

будет решением задачи $u_{tt}=u_{xx}-q(x)u$, $u(0,t)=r(t),\ u_x(0,t)=0$.

Для полноты приведем доказательство леммы. Из основного свойство дельта - функции Дирака

$$\int_R \varphi(x)\delta(x)dx=\varphi(0),$$

следует, что

$$u(0,t)=\int_R r(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_R r(t-\tau)\delta(\tau)d\tau=r(t).$$

Дифференцируя равенство (6), получим

$$u_x(x,t)=\int_R r(\tau)\omega_x(x,t-\tau)d\tau,$$

$$u_{tt}(x,t)=\int_R r(\tau)\omega_{tt}(x,t-\tau)d\tau=\int_R r(\tau)[\omega_{xx}-q(x)\omega]d\tau=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_R r(\tau)\omega(x,t-\tau)d\tau-$$

$$-q(x)\int_R r(\tau)\omega(x,t-\tau)d\tau=u_{xx}-q(x)u.$$

Отсюда вытекает, что

$$u_{tt}=u_{xx}-q(x)u.$$

Учитывая $\omega(x,t)\equiv 0,\ 0<x<|t|$ и $\tilde{\omega}(x,t)=\omega(x,t)-\frac{1}{2}[\delta(t-x)+\delta(t+x)]$, преобразуем формулу (6):

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[r(t-x)+r(t+x)]+\int_{-x}^{x} r(t-\tau)\tilde{\omega}(x,\tau)d\tau.$$

Из $u(x,t)\equiv 0,\ t<|x|$ следует, что

$$\frac{1}{2}[r(t-x)+r(t+x)]+\int_{-x}^{x} r(t-\tau)\tilde{\omega}(x,\tau)d\tau=0,\quad x>|t|. \tag{7}$$

При каждом фиксированном $x>0$ соотношение (7) является интегральным уравнением первого рода относительно функции $\tilde{\omega}(x,t)$, $t\in(-x,x)$. Уравнение (7) называется интегральным уравнением Гельфанда-Левитана.

Дифференцируя уравнение (7) по t, получим уравнение второго рода типа Фредгольма [8,9]

$$\tilde{\omega}(x,t)+\int_{-x}^{x} r'(t-\tau)\tilde{\omega}(x,\tau)d\tau=-\frac{1}{2}\left[r'(t-x)+r'(t+x)\right],\ x>0, t\in(-x,x) \qquad (8)$$

Ядро $r'(t-\tau)$ уравнения (8) является непрерывным и в силу четности $r'(t)$ симметричным. Формула (8) получена из следующей формулы дифференцирования функции с разрывом первого рода из теории обобщенных функций.

Пусть функция $r(x)$ такова, что $r\in C^1(x\le x_0)$ и $r\in C^1(x\ge x_0)$ тогда

$r'=\{r'(x)\}+[r(x_0+0)-r(x_0-0)]\delta(x-x_0)$

В частности $\theta'(x)=\delta(x)$.

Поскольку решение $\tilde{\omega}(x,t)$ уравнения (8) четно по переменной t, это уравнение можно переписать в виде

$$\tilde{\omega}(x,t)+\int_{0}^{x}\left[r'(t-\tau)+r'(t+\tau))\right]\tilde{\omega}(x,\tau)d\tau=-\frac{1}{2}\left[r'(t-x)+r'(t+x)\right],\quad x>0, t\in\left[0,x\right). \quad (9)$$

Уравнение (9) эквивалентно уравнению (7) при дополнительном условии, что решение $\tilde{\omega}(x,t)$ уравнения (9) является четной функцией по аргументу t. В самом деле, любое четное по t решение уравнения (7) является решением уравнения (9). С другой стороны, любое решение уравнения (9), продолженное четным образом по t для значений $t\in(-x,0)$, удовлетворяет уравнению (8), которое получено из уравнения (7) дифференцированием по t, и также удовлетворяет условию

$$\int_{-x}^{x} f(-\tau)\tilde{\omega}(x,\tau)d\tau=0,$$

совпадающему с равенством (7) при $t=0$. Отсюда следует, что любое решение уравнения (5) при четном продолжении по t является решением уравнения $\tilde{\omega}(x,t)=\omega(x,t)-\frac{1}{2}\left[\delta(t-x)+\delta(t+x)\right]$. Тем самым установлена эквивалентность уравнений (7) и (9).

Допустим, что уравнение (9) для каждого $x>0$ однозначно разрешимо в классе непрерывных функций. Тогда его решение определяет непрерывную в области D_1 функцию $\tilde{\omega}(x,t)$ (с учетом ее четного продолжения в ту часть области D_1, где $t<0$).

Так как правая часть (7) непрерывно дифференцируема в D_1, а ядро $r'(t-s)$ кусочно-непрерывно дифференцируемо, то решение уравнения (7) будет непрерывно дифференцируемым в D_1. Из уравнения (9), в частности, следует, что $\tilde{\omega}(x,+0)=0$. Поэтому четное продолжение в области $t<0$ происходит с сохранением непрерывности частных производных.

Искомая функция $q(x)$ связана с решением интегрального уравнения (9) соотношением

$$q(x) = 4\frac{d}{dx}\tilde{\varphi}(x, x-0),\ x > 0 \qquad (10)$$

Для того чтобы построить решение обратной задачи в точке $x > 0$, достаточно решить уравнение (8) и найти $q(x)$ по формуле (10). Из теории уравнений Фредгольма известно, что для малых значений x уравнение (8) однозначно разрешимо.

Для приближенного решения интегрального уравнения (8) заменим интеграл в этом уравнении на сумму и при фиксированном $x > 0$ и при каждом t^k получим систему линейных уравнении:

$$\tilde{\varphi}(x, t_k) + \sum_{i=-n}^{n} r'\left(t_k - \tau_i\right)\tilde{\varphi}\left(x, \tau_i\right)h = -\frac{1}{2}\left[r'(t_k - x) + r'(t_k + x)\right], \qquad (11)$$

$-x \le t_k \le x,\ -n \le k \le n,\quad h = x/n$.

Отсюда, в развернутом виде получим

при $k = -n$:

$$\tilde{\varphi}(x, t_{-n}) + \sum_{i=-n}^{n} r'\left(t_{-n} - \tau_i\right)\tilde{\varphi}\left(x, \tau_i\right)h = -\frac{1}{2}\left(r'\left(t_{-n} - x\right) + r'(t_{-n} + x)\right)$$

при $k = -n+1$:

$$\tilde{\varphi}(x, t_{-n+1}) + \sum_{i=0}^{n} r'\left(t_{-n+1} - \tau_i\right)\tilde{\varphi}\left(x, \tau_i\right)h = -\frac{1}{2}\left(r'\left(t_{-n+1} - x\right) + r'(t_{-n+1} + x)\right) \text{ и т.д.}$$

Таким образом, получим систему

$$A\tilde{\varphi} = f \qquad (12)$$

где матрица A имеет следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 + h\cdot r'(t_{-n} - \tau_{-n}) & h\cdot r'(t_{-n} - \tau_{-n+1}) & h\cdot r'(t_{-n} - \tau_{-n+2}) \ \dots & h\cdot r'(t_{-n} - \tau_{n-1}) & h\cdot r'(t_{-n} - \tau_n) \\ h\cdot r'(t_{-n+1} - \tau_{-n}) & 1 + h\cdot r'(t_{-n+1} - \tau_{-n+1}) & h\cdot r'(t_{-n+1} - \tau_{-n+2}) \dots & h\cdot r'(t_{-n+1} - \tau_{n-1}) & h\cdot r'(t_{-n+1} - \tau_n) \\ h\cdot r'(t_{-n+2} - \tau_{-n}) & h\cdot r'(t_{-n+2} - \tau_{-n+1}) & h\cdot r'(t_{-n+2} - \tau_{-n+2}) \dots & h\cdot r'(t_{-n+2} - \tau_{n-1}) & h\cdot r'(t_{-n+2} - \tau_n) \\ \dots & \dots & \dots \quad \dots & \dots & \dots \\ h\cdot r'(t_n - \tau_{-n}) & h\cdot r'(t_n - \tau_{-n+1}) & h\cdot r'(t_n - \tau_{-n+2}) \ \dots & h\cdot r'(t_n - \tau_{n-1}) & 1 + h\cdot r'(t_n - \tau_n) \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Вектор неизвестных и правая часть записываются следующим образом

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(x, \tau_{-n}) \\ \tilde{\varphi}(x, \tau_{-n+1}) \\ \tilde{\varphi}(x, \tau_{-n+2}) \\ \dots\dots \\ \tilde{\varphi}(x, \tau_n) \end{pmatrix},\quad f = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} r'\left(t^{-n} - x\right) + r'\left(t^{-n} + x\right) \\ r'\left(t^{-n+1} - x\right) + r'\left(t^{-n+1} + x\right) \\ r'(t^{-n+2} - x) + r'\left(t^{-n+2} + x\right) \\ \dots\dots \\ r'\left(t^{n} - x\right) + r'\left(t^{n} + x\right) \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Таким образом, получается уравнение (12) с симметричной матрицей A, т.к. функция $r'(t)$ является четной. Из (13) видно, что недиагональные элементы матрицы A определяетсяследующим образом

$a_{ij} = r'(t_{-n+i-1} - \tau_{-n+j-1})h$, где $i = 1, 2, ..., 2n+1; \quad j = 1, 2, ..., 2n+1$.

Величины, входящие в аргумент функции $r'(t)$ определяются по формулам

$$t_k = -x + (k-1)h, \quad k = 1, 2, ..., 2n+1,$$

$$\tau_k = -x + (k-1)h, \quad k = 1, 2, ..., 2n+1.$$

Из вышеуказанного легко можно увидеть что, матрица A симметричная.

Аналогично можно решить уравнения с дробными производными [10-12].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1 Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН, сер. матем. - 1951. - Т.15.- С. 309-360.

2 Крейн М.Г. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля // Докл. АН СССР. - 1951. - Т. 76, №1. - С. 21-24.

3 Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля и их приложения. - Киев: Наукова думка, 1977. - 329 с.

4 Титчмарш Э.Т. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка / пер. с англ. Б.Д. Лидского; под ред. Б.М. Левитана. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. - Т.1.- 278 с.

5 Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. - 671с.

6 Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. - М.: Наука, 1984.- 240 с.

7 Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.,1988. - 432 с.

8 Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. - М.: Наука, 1984. -263 с.

9 Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. - 457 с.

10 А.К.Уринов, С.М.Ситник, Э.Л.Шишкина, Ш.Т.Каримов. Дробные интегралы и производные (обобщения и приложения): учебное пособие; учебно-методическое издание; на русском языке; А.Уринов и др. Фергана: изд. “Фаргона”,2022.-192 стр.

11 Уринов А.К., Каримов Ш.Т.Операторы Эрдейи-Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных: монография; научное издание; на русском языке; /А.К.Уринов, Ш.Т. Каримов. Фергана: изд. “Фарғона”, 2021. -202 стр.

12 https://farspublishers.org/index.php/ijessh/article/view/94