International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-10| 2023 Published: |22-10-2023|

ОЦЕНКА ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

https://doi.org/10.5281/zenodo.10026799

Саидов М.И.
ассистент Ферганского филиала ТАТУ.

Пусть $\mu(t)$ образует ветвящийся процесс с непрерывным временем $\mu(0)=1$, то есть процесс начинается с одной частицы и

$$P_n(t)=P(\mu(t)=k)=P(\mu(t+\tau)=k/\mu(\tau)=1)$$

Введём производящую функцию для $P_n(t)$

$$F(t,S)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)S^n$$

Предположим, что при $t\to 0$

$$P_1(t)=1+P_1t+o(t),\quad P_n(t)=P_nt+o(t),\qquad n\neq 1$$

Здесь $P_n\geq 0$, при $n\neq 1$ и $P_1\leq 0$ и $\sum_{n=0}^{\infty}P_n=0$ (см [1]).

Для P_n введем производящую функцию

$$f(S)=\sum_{n=0}^{\infty}P_nS^n .$$

Производящая функция $F(t,S)$ ветвящегося процесса с непрерывным временем при $|S|\leq 1$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F(t,S)}{\partial t}=f(F(t,S)) \qquad (1)$$

с начальным условием

$$F(0,S)=S$$

Для определения первых трех моментов

$$A(t)=M\mu(t),\quad B(t)=M\mu(t)(\mu(t)-1),\quad C(t)=M\mu(t)(\mu(t)-1)(\mu(t)-2)$$

при $f^{(k)}(1), k=1,2,3$ конечности продифференцируем (1) по S в точке $S=1$ и находим

$$A(t)=e^{at},$$

$$B(t)=\begin{cases}\frac{b}{a}e^{at}(e^{at}-1), & a\neq 0\\ bt, & a=0\end{cases} \qquad (2)$$

$$C(t)=O(e^{at}),$$

где

$$a = f'(1), \quad b = f''(1) \qquad (3)$$

Если $a>0$ и $b<\infty$, то при $t\to\infty$ случайная величина $\xi(t)=\mu(t)e^{-at}$ сходится к случайной величине ξ (см [1] стр. 80), для которой $M\xi=1,\ D\xi=\dfrac{b}{a}-1.$

Пусть $\overline{\xi}=(\xi-1),\ \overline{\beta_3}=M\,|\overline{\xi}\,|^3$.

Известно, что при $a>0$ и $C_3<+\infty$

$$P\left(\frac{e^{at}(\xi-\xi(t))}{\sqrt{D\overline{\xi}\mu(t)}}<x/\mu(t)>0\right)\to\hat{o}\,(x),$$

где $\phi(x)$ - стандартный нормальный закон.

Имеет место теорема.

Теорема. Если $C<+\infty,\ a>0$, то при $|\tau|\le T_{e^{\grave{a}t}}=\dfrac{\sqrt{e^{at}}\left(D\overline{\xi}\right)^{\frac{3}{2}}}{\overline{\beta_3}}$

$$\left|P\left(\frac{e^{at}(\xi-\xi(t))}{\sqrt{D\overline{\xi}\mu(t)}}<x\Big/\mu(t)>1\right)-\hat{o}\,(x)\right|\le$$

$$\le C_1\int_0^{T_{\mu(t)}}\left(\frac{\overline{\beta_3}}{6\left(D\overline{\xi}\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\right)\int_0^{T_{e^{at}}}\tau^2\sqrt{M\left(\frac{1}{\mu(t)}\Big/\mu(t)>1\right)}\sqrt{M\left(e^{-\frac{\mu(t)-1}{6\mu(t)}\tau^2}\Big/\mu(t)>1\right)}d\tau.$$

При доказательстве теоремы нам будут необходимы следующие результаты, которые мы приведем в качестве леммы (см [3]):

Лемма. Пусть $\overline{\beta_3}<+\infty$, тогда для всех $|\tau|\le T_k=\dfrac{\sqrt{k}\left(D\overline{\xi}\right)^{\frac{3}{2}}}{\overline{\beta_3}}$ при $k\ge 2$ имеем

$$\left|\varphi^k\left(\frac{\tau}{\sqrt{kD\overline{\xi}}}\right)-e^{-\frac{\tau^2}{2}}\right|\le\left(\frac{\overline{\beta_3}}{3!\left(D\overline{\xi}\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\right)\frac{|\tau|^3}{\sqrt{k}}e^{-\frac{(k-1)}{3k}\tau^2}.$$

Доказательство леммы.

Предположим,

$$\varphi\left(\frac{\tau}{\sqrt{kD\overline{\xi}}}\right)=Me^{\frac{i\tau(\xi-1)}{\sqrt{kD\overline{\xi}}}}=Me^{\frac{i\tau\overline{\xi}}{\sqrt{kD\overline{\xi}}}}.$$

Известно, что, если для функции распределения $G(x)$ существует момент α_k порядка k, то соответствующая характеристическая функция $g(\tau)$ допускает представление в виде

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-10| 2023 Published: |22-10-2023|

$$g(\tau)=\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\alpha_l}{l!}(i\tau)^l+\gamma(\tau)\frac{\beta_k}{k!}\tau^k, \tag{4}$$

для всех $-\infty<\tau<+\infty$, где $\gamma(\tau)$ непрерывная комплексная функция и $|\gamma(\tau)|\le 1$, β_k k – тый абсолютный момент случайной величины.

Известно, что для любой характеристической функции $g(\tau)$ и $\psi(\tau)$ имеет место

$$g^k(\tau)-\psi^k(\tau)=\sum_{l=0}^{k-1}g^{k-l-1}(\tau)\psi^l(\tau)\big(g(\tau)-\psi(\tau)\big).$$

Следовательно, в силу последнего

$$\varphi^k\left(\frac{\tau}{\sqrt{kD\overline{\xi}}}\right)-\left(e^{-\frac{\tau^2}{2k}}\right)^k=\sum_{l=0}^{k-1}\varphi^{k-l-1}\left(\frac{\tau}{\sqrt{kD\overline{\xi}}}\right)e^{-\frac{\tau^2}{2k}l}\left(\varphi\left(\frac{\tau}{\sqrt{kD\overline{\xi}}}\right)-e^{-\frac{\tau^2}{2k}}\right). \tag{5}$$

В силу (4)

$$\varphi\left(\frac{\tau}{\sqrt{kD\overline{\xi}}}\right)=1-\frac{\tau^2}{2k}+\gamma(\tau)\frac{\overline{\beta}_3\tau^3}{6\left(D\overline{\xi}\right)^{\frac{3}{2}}k^{\frac{3}{2}}}. \tag{6}$$

Для характеристической функции нормального закона также имеет место

$$e^{-\frac{\tau^2}{2k}}=1-\frac{\tau^2}{2k}+\gamma(\tau)\frac{\beta_3(\phi)\tau^3}{3!\sqrt{k^3}}, \tag{7}$$

где

$$\beta_3(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^3e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2\sqrt{2}}{\pi},$$

а также $\gamma(\tau)$ не везде одно и тоже.

Из (6) и (7) для всех τ следует, что

$$\varphi\left(\frac{\tau}{\sqrt{kD\overline{\xi}}}\right)-e^{-\frac{\tau^2}{2k}}=\gamma(\tau)\frac{\overline{\beta}_3\tau^3}{6\sqrt{\left(D\overline{\xi}\right)^3k^3}}+\gamma(\tau)\frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{\pi}}\tau^3,$$

по этому

$$\left|\varphi\left(\frac{\tau}{\sqrt{kD\overline{\xi}}}\right)-e^{-\frac{\tau^2}{2k}}\right|\le\left(\frac{\overline{\beta}_3}{3!\sqrt{\left(D\overline{\xi}\right)^3}}+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\right)\frac{|\tau|^3}{\sqrt{k^3}}. \tag{8}$$

Из (6) при $\frac{\tau^2}{2k}<1$ имеем

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-10| 2023 Published: |22-10-2023|

$$\left|\varphi\left(\frac{\tau}{\sqrt{kD\overline{\xi}}}\right)\right| \le 1-\frac{\tau^2}{2k}+\frac{\overline{\beta}_3\tau^3}{6\sqrt{k^3\left(D\overline{\xi}\right)^3}} \le 1-\frac{\tau^2}{2k}\left(1-\frac{\overline{\beta}_3|\tau|}{3\sqrt{k\left(D\overline{\xi}\right)^3}}\right) \le 1-\frac{\tau^2}{3k}. \qquad (9)$$

При $0\le\alpha\le1$

$1-\alpha\le e^{-\alpha}$

следовательно из (9)

$$\left|\varphi\left(\frac{\tau}{\sqrt{kD\overline{\xi}}}\right)\right| \le e^{-\frac{\tau^2}{3k}},$$

так как

$$\left|e^{-\frac{\tau^2}{2k}}\right| \le e^{-\frac{\tau^2}{3k}}$$

Тогда в силу последних двух неравенств при $|t|\le T_k$ имеем

$$\left|\varphi^{k-l-1}\left(\frac{\tau}{\sqrt{kD\overline{\xi}}}\right)e^{-\frac{\tau^2}{2k}l}\right| \le e^{\frac{-(k-1)\tau^2}{3k}}. \qquad (10)$$

Подставляя (8) и (10) к (5), имеем

$$\left|\varphi^{k}\left(\frac{\tau}{\sqrt{kD\overline{\xi}}}\right)-e^{-\frac{\tau^2}{2k}}\right| \le \sum_{l=0}^{k-1} e^{\frac{-(k-1)\tau^2}{3k}}\left(\frac{\overline{\beta}_3}{3!\sqrt{\left(D\overline{\xi}\right)^3}}+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\right)\frac{|\tau|^3}{\sqrt{k^3}} = \left(\frac{\overline{\beta}_3}{3!\sqrt{\left(D\overline{\xi}\right)^3}}+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\right)\frac{\tau^3}{\sqrt{k}}e^{\frac{-(k-1)}{3k}\tau^2}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. В силу свойства ветвящихся процессов сходимости по вероятности имеем

$$e^{at}\left(\xi-\xi(t)\right)=\lim_{t_1\to\infty} e^{at}\frac{\mu(t+t_1)}{e^{k}(t+t_1)}-e^{at}\xi(t)=$$

$$=\lim_{t_1\to\infty} e^{at}\frac{\mu^{(1)}(t_1)+\mu^{(2)}(t_1)+\cdots+\mu^{(\mu(t))}(t_1)}{e^{a}(t-t_1)}-\mu(t)=$$

$$=\lim_{t_1\to\infty}\frac{\mu^{(1)}(t_1)+\mu^{(2)}(t_1)+\cdots+\mu^{(\mu(t))}(t_1)}{e^{at_1}}-\mu(t)=$$

$$=\xi^{(1)}+\xi^{(1)}+\cdots+\xi^{\mu(t)}-\mu(t), \qquad (11)$$

где $\xi^{i}, i=1,\overline{\mu(t)}$ независимые и одиноково распределенные ,как ξ, а также $\mu^{(i)}(t_1), i=1,\overline{\mu(t)}$ независимые и одиноково распределенные, как $\mu(t_1)$.

В силу (2)

$$P\left(\frac{e^{at}(\xi-\xi(t))}{\sqrt{D\bar{\xi}\mu(t)}}<x\Big/\mu(t)>1\right)=$$

$$=\frac{1}{P(\mu(t)>1)}P\left(\frac{e^{at}(\xi-\xi(t))}{\sqrt{D\bar{\xi}\mu(t)}}<x\Big/\mu(t)>1\right)=$$

$$=\frac{1}{P(\mu(t)>1)}\sum_{k=2}^{\infty}P(\mu(t)=k)P\left(\frac{e^{at}(\xi-\xi(t))}{\sqrt{D\bar{\xi}\mu(t)}}<x\right)=$$

$$=\frac{1}{P(\mu(t)>1)}\sum_{k=2}^{\infty}P(\mu(t)=k)P\left(\frac{\xi^{(1)}+\xi^{(2)}+\dots+\xi^{(k)}-k}{\sqrt{D\bar{\xi}k}}<x\right); \qquad (12)$$

далее применяя лемму и неравенство Берри-Эссеена при $k>1$, имеем

$$\left|P\left(\frac{\xi^{(1)}+\xi^{(2)}+\dots+\xi^{(k)}-k}{\sqrt{D\bar{\xi}k}}<x\right)-\phi(x)\right|\le\left(\frac{\bar{\beta}_3}{6\sqrt{(D\bar{\xi})^3}}+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\right)\cdot\int_0^{T_{e^{kt}}}\tau^2\sqrt{\frac{1}{k}}e^{-\frac{(k-1)}{3k}\tau^2}d\tau.$$

Тогда применяя последнее неравенство к (12), при достаточно большой μ(t) имеем

$$\left|P\left(\frac{e^{at}(\xi-\xi(t))}{\sqrt{D\bar{\xi}\mu(t)}}<x\Big/\mu(t)>1\right)-\phi(x)\right|\le\left(\frac{\bar{\beta}_3}{6\sqrt{(D\bar{\xi})^3}}+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\right)\cdot\int_0^{T_{e^{kt}}}\tau^2M\left(\sqrt{\frac{1}{\mu(t)}}e^{-\frac{(\mu(t)-1)}{3\mu(t)}\tau^2}\right)d\tau.$$

По неравенству Коши-Буняковского получаем доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nasriddinov, O., Maniyozov, O., & Bozorqulov, A. (2023). XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING UMUMIY YECHIMNI TOPISHNING XARAKTERISTIKALAR USULI. *Research and implementation*.

2. Maniyozov, O., Shokirov , A., & Islomov , M. (2023). MATRITSALARNI ARXITEKTURA VA DIZAYN SOXASIDA TATBIQI. *Research and Implementation*. извлечено от https://fer-teach.uz/index.php/rai/article/view/1007.

3. Jo’raeva, D. (2022). BUZILADIGAN ODDIY DIFFERENTSIAL TENGLAMA UCHUN BIRINCHI CHEGARAVIY MASALA. O'ZBEKISTONDA FANLARARO INNOVATSIYALAR VA ILMIY TADQIQOTLAR JURNALI, 2(13), 456-461.

4. To'xtasinov, D. F. (2018). Didactic Bases Of Development Of Logical Thinking In Schoolchildren. *Central Asian Journal of Education*, *2*(1), 68-74.

5. Nasriddinov, O., & Isomiddinova, O. (2023). BIOLOGIYA FANIDA DIFFERENSIAL TENGLAMAGA KELUVCHI MASALANI MAPLE DASTURIDA YECHISH. *Research and implementation*.

6. Ergashev, T. G., & Tulakova, Z. R. (2021). The Dirichlet problem for an elliptic equation with several singular coefficients in an infinite domain. *Russian Mathematics*, *65*(7), 71-80.

7. Tolipov, N., Isaxonov, X., & Zunnunov, M. (2023). SHAR TASHQARISIDAGI SOHA UCHUN GARMONIK DAVOM ETTIRISH MASALASI. Research and implementation.

8. Далиев, Б. С. (2021). Оптимальный алгоритм решения линейных обобщенных интегральных уравнений Абеля. *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, *5*(35), 120-129.

9. Madibragimova, I. M. (2023). MATEMATIKA DARSLARIDA MUAMMOLI TA'LIM. *PRINCIPAL ISSUES OF SCIENTIFIC RESEARCH AND MODERN EDUCATION*, *2*(6).

10. Yusupov, Y. A. (2018). Algorithms for adaptive identification of parameters of stochastic control objects. *Chemical Technology, Control and Management*, *2018*(2), 74-77

11. Saidov, M., & Isroilov, S. (2023). TO'RTINCHI TARTIBLI BIR JINSLI BO'LMAGAN TENGLAMA UCHUN ARALASH MASALA. Research and implementation.

12. Isaqovich, T. N. (2023). Chorak doira tashqarisida bigarmonik tenglama uchun nokorrekt qo 'yilgan masala. Talqin va tadqiqotlar ilmiy-uslubiy jurnali, 1(18), 73-83.

13. Bozarov B.I. Optimal quadrature formulas with the trigonometric weight in the Sobolev space // Bulletin of the Institute of Mathematics, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics. – Tashkent, 2020. no 4. pp.1-10.

14. Сенатов В., Центральная предельная теорема. Точность аппроксимации и асимптотические разложения, М.: Книжный дом «Либроком», 2009, 352 с.

15. Ватутин В.А., Зубков А.М., Ветвящиеся процессы. В сб. «Теория вероятностей, мат.статистика, Теор. кибернетика» том 23, М., 1985. (Итоги науки и техники), 3-67 стр.