International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-10| 2023 Published: |22-10-2023|

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

https://doi.org/10.5281/zenodo.10027818

Тулакова З.Р.
старший преподаватель,
Ферганский филиал Ташкентского университета информационных технологий
Электронная почта: ziyodacoders@gmail.com

Аннотация

В настоящей работе исследуется смешанная задача для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами. Используя метод "abc", доказана единственность решения смешанной задачи. Применяя метод функций Грина, мы способны найти решение задачи в явном виде, при нахождении которого существенно используются свойства гипергеометрических функций Аппеля и Гаусса.

Ключевые слова

Смешанная задача, трехмерное сингулярное эллиптическое уравнение, функция Грина, гипергеометрические функции Гаусса и Аппелла.

Annotatsiya

Mazkur ishda ikkita singular koeffisientli uch o'lchovli elliptik tenglama uchun aralash masala tadqiq etilgan. Masala yechimining yagonaligi "abc" usul yordamida isbotlangan. Masalaning yechimi Appell funksiyasi yordamida ifodalanadigan Grin funksiyasi orqali yozilgan. Yechimni oshkor ko'rinishda topishda Appell va Gauss gipergeometrik funksiyalarining xossalaridan foydalanilgan.

Kalit so'zlar

Aralash masala, uch o'lchovli singular elliptik tenglama, Grin finksiyasi, Gauss va Appell gipergeometrik funksiyalari

Введение

Известно , что теория краевых задач для вырожденных уравнений и уравнений с сингулярными коэффициентами является одной из быстро развивающихся частей современной теории дифференциальных уравнений в частных производных, которая встречается при решении многих важных вопросов прикладного характера, например, [1]. Опуская огромную библиографию, в которой изучаются различные локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа, содержащих эллиптические уравнения с сингулярными коэффициентами, отметим некоторые работы, близкие к настоящей работе. В работе [2] были построены фундаментальные решения для многомерного эллиптического уравнения с несколькими сингулярными коэффициентами, а в [3,4,5] были найдены явные решения задач Дирихле, Холмгрена и обобщенных задач Холмгрена в гипероктанте шара. В работах [6,7,8]были получены явные решения в бесконечных областях аналогичных задач для одного и того же уравнения. В упомянутых выше работах [3,4,5]автору удалось найти решения поставленных задач, когда значение искомого решения на части многомерной сферы было известно заранее

Если на части сферы, заключенной между боковыми гранями гипероктанта, задана нормальная производная, на одной из боковых граней значение, а на других гранях либо само значение, либо нормальная производная искомого решения, то такая задача называется смешанной задачей, изучению которой посвящено относительно немного работ. Смирнов [9] одним из первых решил смешанную задачу для уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\alpha}{x}u_x=0,\ x>0,\ 0<2\alpha<1.$$

В недавней работе [10] рассматривается смешанная задача для уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\frac{2\alpha}{x}u_x=0,\quad 0<2\alpha<1.$$

в полушарии $R_3^+=\{(x,y,z):x>0\}$ трехмерного евклидова пространства.

В настоящей работе мы находим явное решение the.

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\frac{2\alpha}{x}u_x+\frac{2\beta}{y}u_y=0,\quad 0<2\alpha,2\beta<1. \qquad (1)$$

Заметим, что для уравнения (1) пространственные краевые задачи с условиями Дирихле и Дирихле-Неймана на боковых гранях четверти шара найдены в [11,12].

2. Формулировка проблемы DM и основные результаты

Пусть $\Omega\subset R^+\times R^+\times R$ - конечная простосвязная область, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$ и гладкой поверхностью S. Пересечения этой поверхности с плоскостями $x=0$, $y=0$ обозначаются γ_1, γ_2, соответственно. Обозначим как область Ω_1 плоскость $y-z$, ограниченную

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-10| 2023 Published: |22-10-2023|

$x=0(0<y<b,\ -c<z<d)$, а кривой $\gamma_1: x=f_1(y,z)$. Ω_2 является область в плоскости, $x-z$ ограниченная $y=0(0<x<a,\ -c<z<d)$, $\gamma_2: y=f_2(x,z)$. Здесь a, b, c, d - положительные константы.

Задача DM. Найти функцию $u(x,y,z)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению. (1) условия

$$u(0,y,z)=\tau_1(y,z).\quad (y,z)\in\Omega_1 \tag{2}$$

$$u(x,0,z)=\tau_2(x,z).\quad (x,z)\in\Omega_2, \tag{3}$$

$$B_n^{\alpha,\beta}[u]\big|_S=\varphi(x,y,z),\quad (x,y,z)\in S, \tag{4}$$

wздесь $\tau_1(y,z)$, $\tau_2(x,z)$, $\varphi(x,y,z)$ приведены функции, удовлетворяющие следующим условиям соответствия: $\tau_1(0,z)=\tau_2(0,z),\ -c<z<d$;

$$B_n^{\alpha,\beta}[\ \ ]=x^{2\alpha}y^{2\beta}\left(\cos(n,x)\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\cos(n,y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\cos(n,z)\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

2. 1. Тединственности решения

Можно легко проверить правильность следующего соотношения

$$x^{2\alpha}y^{2\beta}\left[uH_{\alpha,\beta}(w)-wH_{\alpha,\beta}(u)\right]=y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^{2\alpha}(uw_x-wu_x)\right]+$$
$$+x^{2\alpha}\frac{\partial}{\partial y}\left[y^{2\beta}(uw_y-wu_y)\right]+x^{2\alpha}y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial z}\left[uw_z-wu_z\right].$$

Пусть Ω_ε - вспомогательная область Ω на расстоянии $\varepsilon>0$ от ее границы $\partial\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\cup S$ и $\cos(n,x)d\sigma=dydz$, $\cos(n,y)d\sigma=dxdz$, $\cos(n,z)d\sigma=dxdy$, n - внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Интегрируйте обе стороны приведенного выше равенства в области Ω_ε и используйте классическую формулу Гаусса-Остроградского:

$$\iiint_{\Omega_\varepsilon}x^{2\alpha}y^{2\beta}\left[uH_{\alpha,\beta}(w)-wH_{\alpha,\beta}(u)\right]dxdydz=\iint_{\partial\Omega_\varepsilon}x^{2\alpha}y^{2\beta}[(uw_x-wu_x)\cos(n,x)+$$
$$+(uw_y-wu_y)\cos(n,y)+(uw_z-wu_z)\cos(n,z)]d\sigma. \tag{5}$$

Используя равенство

$$x^{2\alpha}y^{2\beta}\left[uH_{\alpha,\beta}(u)+u_x^2+u_y^2+u_z^2\right]=(x^{2\alpha}y^{2\beta}uu_x)_x+(x^{2\alpha}y^{2\beta}uu_y)_y+(x^{2\alpha}y^{2\beta}uu_z)_z,$$

ctне - a - a - a- a

$$\iiint_{\Omega_\varepsilon}x^{2\alpha}y^{2\beta}uH_{\alpha,\beta}(u)dxdydz+\iiint_{\Omega_\varepsilon}x^{2\alpha}y^{2\beta}[u_x^2+u_y^2+u_z^2]dxdydz=$$

International Journal of Education, Social Science & Humanities. Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-10| 2023 Published: |22-10-2023|

$$=\iiint_{\Omega_\varepsilon}[(x^{2\alpha}y^{2\beta}uu_x)_x+(x^{2\alpha}y^{2\beta}uu_y)_y+(x^{2\alpha}y^{2\beta}uu_z)_z]dxdydz.$$

Применив еще раз формулу Гаусса-Остроградского к этому равенству и допустив $\varepsilon\to 0$, получим

$$\iiint_{\Omega}x^{2\alpha}y^{2\beta}\left[u_x^2+u_y^2+u_z^2\right]dxdydz=$$

$$=\iint_{\Omega_1}y^{2\beta}\tau_1\nu_1dydz+\iint_{\Omega_2}x^{2\alpha}\tau_2\nu_2dxdz+\iint_S u\varphi d\sigma, \qquad (6)$$

где

$$x^{2\alpha}u_x(x,y,z)\big|_{x=0}=\nu_1(y,z)\in\Omega_1,\quad y^{2\beta}u_y(x,y,z)\big|_{y=0}=\nu_2(x,z)\in\Omega_2.$$

Чтобы доказать единственность решения, как обычно, предположим, что задача имеет два v,w решения. Обозначая $u=v-w$, мы имеем, что u удовлетворяет однородной задаче DM $(\tau_1=0,\ \tau_2=0,\ \varphi=0)$. Далее мы должны доказать, что однородная задача имеет только тривиальное решение. В этом случае из (6) можно легко получить

$$\iiint_{\Omega}x^{2\alpha}y^{2\beta}[u_x^2+u_y^2+u_z^2]dxdydz=0.$$

Отсюда следует, что $u_x=u_y=u_z=0$, из чего следует, что u является постоянной функцией. Рассматривая однородные условия (2)-(4), мы приходим к выводу, что $u(x,y,z)\equiv 0,$ в Ω.

2.2. Существование решения

Мы доказываем существование решения в частном случае предметной области Ω, чтобы получить решение в явном виде. Предположим, $R=a=b=c=d$ и пусть $\Omega=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2<R^2,\ x>0, y>0, -R<z<R\}$. мы найдем решение рассматриваемой задачи, используя метод функций Грина [31]. Поэтому сначала мы дадим определение функции Грина для сформулированной задачи.

Определение. Мы называем функцию $G_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$ функцией Грина задачи DM, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. tего функция является обычным решением уравнения. (1) в домене Ω, за исключением точки, (x_0,y_0,z_0).которая является любой фиксированной точкой Ω;
2. it удовлетворяет граничным условиям

$$G_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0)\big|_{x=0}=0,\quad G_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0)\big|_{y=0}=0,$$

$$\left\{B_n^{\alpha,\beta}\left[G_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0)\right]\right\}\Big|_S=0;$$

3. it может быть представлено в виде

$$G_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0)=q(x,y,z;x_0,y_0,z_0)+\bar{q}(x,y,z;x_0,y_0,z_0), \qquad (7)$$

гдездесь

$$q(x,y,z;x_0,y_0,z_0)=k(r^2)^{\alpha+\beta-\frac{5}{2}}(xx_0)^{1-2\alpha}(yy_0)^{1-2\beta}F_2\left(\frac{5}{2}-\alpha-\beta;\alpha,1-\alpha,1-\beta;2-2\alpha,2-2\beta;\xi,\eta\right)$$

является фундаментальным решением, найденным ранее [11] (см. Также [2]),

$$F_2\left(a;b_1,b_2;c_1,c_2;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}\left(b_1\right)_m\left(b_2\right)_n}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

является известной функцией Appell [13] (стр.224, уравнение(7)),

$\left(\lambda\right)_m=\lambda(\lambda+1)...(\lambda+m-1),\ m=1,2,...,\ (\lambda)_0=1$

- символ Отбойного молотка; функция

$$\bar{q}(x,y,z;x_0,y_0,z_0)=-\left(\frac{a}{R_0}\right)^{5-2\alpha-2\beta}q\left(x,y,z;\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0\right)$$

я являюсь регулярным решением уравнения (1) в области Ω.

Здесь,

$$\bar{x}_0=\frac{a^2}{R_0^2}x_0,\ \ \bar{y}_0=\frac{a^2}{R_0^2}y_0,\ \ \bar{z}_0=\frac{a^2}{R_0^2}z_0,\ \ \ R_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2.$$

Вырежьте маленький шарик с центром в (x_0,y_0,z_0) и радиусом $\rho>0$ от области Ω. Обозначьте сферу вырезанного шара как C_ρ и через Ω_ρ обозначьте оставшуюся часть Ω.

Применяя формулу (5), получаем

$$\iint_{C_\rho}x^{2\alpha}y^{2\beta}\left[u\frac{\partial G}{\partial n}-G_1\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS=\iint_{\Omega_1}y^{2\beta}\tau_1(y,z)G*(0,y,z;x_0,y_0,z_0)dydz+$$

$$+\iint_{\Omega_2}x^{2\alpha}\tau_2(x,z)G**(x,0,z;x_0,y_0,z_0)dxdz+$$

$$+\iint_S G(x,y,z;x_0,y_0,z_0)\varphi(\sigma)d\sigma, \qquad (8)$$

гдездесь

$$G*(0,y,z;x_0,y_0,z_0)=x^{2\alpha}\left.\frac{\partial G(x,y,z;x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\right|_{x=0},\quad (y,z)\in\Omega_1$$

International Journal of Education, Social Science & Humanities. Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-10| 2023 Published: |22-10-2023|

$$G^{**}(x,0,z;x_0,y_0,z_0)=y^{2\beta}\left.\frac{\partial G(x,y,z;x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\right|_{y=0},\quad (x,z)\in\Omega_2.$$

Известно [11]:

$$\iint_{C_\rho} x^{2\alpha}y^{2\beta}u\frac{\partial G}{\partial n}dS=u\left(x_0,y_0,z_0\right),\qquad \iint_{C_\rho} x^{2\alpha}y^{2\beta}G\frac{\partial u}{\partial n}dS=0. \tag{9}$$

Теперь из (8) и (9) мы можем записать решение задачи DM следующим образом:

$$u(x_0,y_0,z_0)=\iint_{\Omega_1} y^{2\beta}\tau_1(y,z)G^*(0,y,z;x_0,y_0,z_0)dydz+$$
$$+\iint_{\Omega_2} x^{2\alpha}\tau_2(x,z)G^{**}(x,0,z;x_0,y_0,z_0)dxdz+\iint_S G(x,y,z;x_0,y_0,z_0)\varphi(\sigma)d\sigma. \tag{10}$$

Конкретные значения функции Грина задаются формулой

$$G^*(0,y,z;x_0,y_0,z_0)=k(1-2\alpha)x_0^{1-2\alpha}(yy_0)^{1-2\beta}\left[\frac{{}_2F_1\left(\frac{5}{2}-\alpha+\beta,1-\beta,2-2\beta;\eta_{0x}\right)}{\left[x_0^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{5}{2}-\alpha-\beta}}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{a}{R_0}\right)^{4-4\alpha-4\beta}\frac{{}_2F_1\left(\frac{5}{2}-\alpha+\beta,1-\beta,2-2\beta;\bar{\eta}_{0x}\right)}{\left[\left(a-\frac{yy_0}{a}\right)^2+\left(a-\frac{zz_0}{a}\right)^2+\frac{x_0^2+z_0^2}{a^2}y^2+\frac{x_0^2+y_0^2}{a^2}z^2-a^2\right]^{\frac{5}{2}-\alpha-\beta}}\right],$$

$$G^{**}(x,0,z;x_0,y_0,z_0)=k(1-2\beta)(xx_0)^{1-2\alpha}y_0^{1-2\beta}\left[\frac{{}_2F_1\left(\frac{5}{2}-\alpha-\beta,1-\alpha,2-2\alpha;\xi_{0y}\right)}{\left[(x-x_0)^2+y_0^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{5}{2}-\alpha-\beta}}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{a}{R_0}\right)^{4-4\alpha-4\beta}\frac{{}_2F_1\left(\frac{5}{2}-\alpha-\beta,1-\alpha,2-2\alpha;\bar{\xi}_{0y}\right)}{\left[\left(a-\frac{xx_0}{a}\right)^2+\left(a-\frac{zz_0}{a}\right)^2+\frac{y_0^2+z_0^2}{a^2}x^2+\frac{x_0^2+y_0^2}{a^2}z^2-a^2\right]^{\frac{5}{2}-\alpha-\beta}}\right],$$

Здесь,

$$\xi_{0y} = -\frac{4xx_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2 + (z-z_0)^2}, \quad \eta_{0x} = -\frac{4yy_0}{x_0^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

$$\bar{\xi}_{0y} = -\frac{4a^2}{R_0^2} \frac{xx_0}{\left(a - \frac{yy_0}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{zz_0}{a}\right)^2 + \frac{y_0^2 + z_0^2}{a^2} x^2 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2} z^2 - a^2},$$

$$\bar{\eta}_{0x} = -\frac{4a^2}{R_0^2} \frac{yy_0}{\left(a - \frac{yy_0}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{zz_0}{a}\right)^2 + \frac{x_0^2 + z_0^2}{a^2} y^2 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2} z^2 - a^2},$$

$$k = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(4-2\alpha-2\beta)}{\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(2-2\beta)\Gamma(2-\alpha-\beta)};$$

$F(a,b;c;x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \frac{x^m}{m!}$ является гипергеометрической функцией Гаусса [13] (стр. 68).

Следовательно, основной результат работы формулируется в виде следующей теоремы:

Теорема. Если $\tau_1(y,z) \in C^2(\Omega_1)$, $\tau_2(x,z) \in C^2(\Omega_2)$, $\varphi(x,y,z) \in C^1(S)$, то Задача DM имеет единственное решение, представленное формулой (10).

ССЫЛКИ

1. Maniyozov, O., Bozorqulov, A., & Isomiddinova, O. (2023). TA'LIM JARAYONIDA BIRINCHI TARTIBLI CHIZIQLI ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING YECHIMINI MAPLE DASTURIDA TOPISH. *Farg 'ona davlat universiteti ilmiy jurnali*, (1), 190-202.

2. Nasriddinov, O., Maniyozov, O., & Bozorqulov, A. (2023). XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING UMUMIY YECHIMNI TOPISHNING XARAKTERISTIKALAR USULI. *Research and implementation*.

3. Jo'raeva, D. (2022). BUZILADIGAN ODDIY DIFFERENTSIAL TENGLAMA UCHUN BIRINCHI CHEGARAVIY MASALA. O'ZBEKISTONDA FANLARARO INNOVATSIYALAR VA ILMIY TADQIQOTLAR JURNALI, 2(13), 456-461.

4. Otaqulov, O., Nasriddinov, O., & Isomiddinova, O. (2023). TA'LIM JARAYONIDA DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING YECHIMINI MAPLE DASTURIDA TOPISH. *Scientific journal of the Fergana State University*, (1), 1-1.

5. Nasriddinov, O., & Isomiddinova, O. (2023). BIOLOGIYA FANIDA DIFFERENSIAL TENGLAMAGA KELUVCHI MASALANI MAPLE DASTURIDA YECHISH. *Research and implementation*.

6. Nasriddinov, O., Maniyozov, O., & Bozorqulov, A. (2023). XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING UMUMIY YECHIMNI TOPISHNING XARAKTERISTIKALAR USULI. Research and implementation.

7. Tolipov, N., Xudoynazarov, Q., & Munavarjonov, S. (2023). ОБ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛУШАРЕ. Research and implementation.

8. Tolipov, N., Isaxonov, X., & Zunnunov, M. (2023). SHAR TASHQARISIDAGI SOHA UCHUN GARMONIK DAVOM ETTIRISH MASALASI. Research and implementation.

9. Madibragimova, I. M. (2023). MATEMATIKA DARSLARIDA MUAMMOLI TA'LIM. *PRINCIPAL ISSUES OF SCIENTIFIC RESEARCH AND MODERN EDUCATION*, *2*(6).

10. Madibragimova, I. (2023). TRIGONOMETRIK TENGSIZLIKLARNI YECHISHDA GEOGEBRA DASTURIDAN FOYDALANISH. *Engineering problems and innovations*.

11. Madibragimova, I. (2023). O'QITISHDA TALIM TEXNOLOGIYALARI. *Engineering problems and innovations*.

12. To'xtasinov, D. F., & qizi Abdullayeva, S. H. (2023). MATEMATIKA DARSLARIDA IJODIY TAFAKKURNI RIVOJLANTIRISH SHARTLARINING DIDAKTIK KOMPLEKSINI AMALIYOTDA QO'LLASH YO'LLARI. *Educational Research in Universal Sciences*, *2*(2), 613-616.