International Journal of Education, Social Science & Humanities. Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-11| 2023 Published: |22-11-2023|

ПОСТРОЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ВЛАСОВА-КАНТОРОВИЧА И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ

https://doi.org/10.5281/zenodo.10199607

Саттаров Ахат.
Университет мировой экономики и дипломатии, Ташкент, Узбекистан

Современные условия работы пространственных элементов конструкций, имеющих форму стержней, предъявляют повышенные требования к расчёту их на прочность. В связи с этом возрастает интерес к результатам расчёта пространственных элементов конструкций с учётом пластических деформаций. Большой успех при исследовании физических нелинейных задач достигнут с помощью метода упругих решений А. А. Ильюшина на основе теории малых упруго - пластических деформаций [1].

Согласно методу Власова-Канторовича, математический модель решение трёхмерного уравнения Ляме в упруго - пластической стадии представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} U &= U_0\,(x,y,z) + \sum_{mn} U_{mn}\,(z) * f_{mn}^{(1)}(x,y), \\ V &= V_0\,(x,y,z) + \sum_{mn} V_{mn}\,(z) * f_{mn}^{(2)}(x,y) \\ W &= W_0\,(x,y,z) + \sum_{mn} W_{mn}\,(z) * f_{mn}^{(3)} \end{aligned} \qquad (1)$$

где U_0, V_0, W_0 –заданные функции координат, которые могут быть построены на основы элементарных теорий; $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ – координатные функции, подлежащие предварительному выбору с учётом граничных условий; U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}- обобщенные перемещения тела, являющимся искомыми функциями.

Приближение ряда (1) во многом зависит от выбора U_0, V_0, W_0. Построение этих функций зависит от поставленного задачи и от граничных условий. В этой работе приводится метод построения численно - аналитической математической модели функций для эластичного стержня в виде параллелепипеда. Также все численные анализы проведены в пакете MatLab. Выбор пакета MatLab является удобством и простотой выполнения аналитических и численных операций.

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-11| 2023 Published: |22-11-2023|

Пусть задан параллелепипед с сторанами $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$, $0 \le z \le L$. Предположим один из сечений (z=0) защемлено, а в другом (z=L) задан крутящий момент (J_{2H}-см.ниже). Боковые поверхности заданного тела считаются свободными от нагрузок.

При построения дифференциальных уранений равновесия стесненного кручения призматических тел прямоугольного сечения решения будем искать в следующем виде:

$U_0(x,y,z)=-\theta(z)y;\ V_0(x,y,z)=\theta(z)x;\ W_0(x,y,z)=\nu(z)\varphi(x,y)$ (2)

где $\theta(z)$-угол кручения, $\nu(z)$-относительный угол закручивания, $\varphi(x,y)$-функция кручения.

Учитывая независимость вариаций функций $\theta(z)$, $\nu(z)$ и $\varphi(x,y)$, на основе общей схемы [2] получим следующие уравнения и граничные условия:

$$\begin{aligned}&\theta'' + a_1\nu' = 0\\&\nu'' - b_1\theta' - b_2\nu = 0\end{aligned} \qquad (3)$$

при z=0 $\theta(0)=0$, $\nu(0=0$,

при z=L $\nu'(L)=0$, $\theta'(L)+a_1\nu(L)-\beta_H=0$

$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = 0$ (4)

при $x=\pm a$, $\varphi_x - y=0$;

при $y=\pm b$, $\varphi_y + x=0$;

В (3)-(4) приняты следующие обозначения:

$$a_1 = {J_\nu}/{J_p};\ b_1 = {J_\nu}/{J_{\varphi\varphi}};\ b_2 = {J_k}/{J_{\varphi\varphi}}$$

$$J_p = \iint_F (x^2+y^2)dF;\ J_{\varphi\varphi} = \frac{\lambda+2G}{G}\iint_F \varphi^2\,dF;\ J_k = \iint_F (\varphi_x^2+\varphi_y^2)dF;$$

$$J_\nu = \iint_F (x\,\varphi_y - y\varphi_x)dF;\ J_{2H} = \frac{1}{G}\iint_F (xP_{yz} - yP_{xz})dF;\ \ \beta_H = J_{2H}/J_p;$$

где: G, λ – постоянные Ляме.

Рассмотрим интегрирования уравнения (3)-(4). Согласно методу упругих решений на нулевом шагу функция кручения $\varphi(x,y)$ совпадает с решением Сен-Венана:

$$\varphi(x,y) = xy + \sum_{i=1,2,3,..}\frac{4(-1)^i}{aP_{1i}^3}\frac{Sh(P_{1i}y)}{Ch(P_{1i}b)}Sin(P_{1i}x)\ \text{где}\ \ P_{1i} = (2i-1)\pi/2a \qquad (5)$$

Функции $\theta(z)$ и $\nu(z)$ определяются соответственно из уравнений (3) и в матричной форме имеют вид

$R(z)=F(z)\,C$, (6)

где

$$R(z) = \begin{bmatrix} \theta \\ \theta' \\ \nu \\ \nu' \end{bmatrix}, \qquad F(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1+z & -{a_1 e^{rz}}/{r} & {a_1 e^{-rz}}/{r} \\ 0 & -{b_1}/{b_2} & -a_1 e^{rz} & -a_1 e^{-rz} \\ 0 & 1 & e^{rz} & e^{-rz} \\ 0 & 0 & re^{rz} & -re^{rz} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}, r = \sqrt{b_2 - a_1 b_1}$$

$c_1^0 = - c_2^0(1+a_1b_1 th(rL)/rb_2$; $c_2^0 = \beta_H b_2/r^2$;

$c_3^0 = c_2^0\, b_1/b_2(1+e^{2rL})$; $c_4^0 = c_2^0\, b_1\, e^{2rL}/b_2(1+e^{2rL})$.

Для апробирования разработанный схемы и достоверности полученных результатов, а также для исследования напряжённо-деформированного состояния упругого тела в задачах стеснённого кручения были произведена расчёты с различными геометрическими и механическими характеристиками тела (a, b, L-задаётся в сантиметрах; $E=2*10^6$кг/см^2 ; $P_{xz}(x=0)=-yP_1$; $P_{yz}(y=0)=xP_2$;(P_1,P2-в кг/см^2).

При построении U_0, V_0, W_0 в упругой постановки задачи численный сходимость результатов зависит от количества членов в (5) (табл.1).

Таблица 1.

a=1 b=1 L=4 x=a y=b z=L $P_1=P_2=4000$			
n	φ(x,y)	V_0(x,y,z)	W_0(x,y,z)
1	0.03754	0.03023	0.00030
2	0.30566	0.03040	0.00009
3	0.03018	0.03041	0.00004
4	0.03013	0.03041	0.00002

Из табл. 1 следует, что для получения четыре верных знаков в перемещениях достаточно φ(x,y) взять один или два члена.

1. Ильюшин А.А. Пластичность –М.: Изд. АН СССР, 1963.

2. Курманбаев Б. Саттаров А. Алгоритм расчёта призматических тел в упругой и упруго - пластической зонах. - В сб.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент: РИСО АН УзССР, 1980, вып. 62.