International Journal of Education, Social Science & Humanities. FARS Publishers
Impact factor (SJIF) = 6.786

Volume-11| Issue-2| 2023 **Research Article**

СПЕКТРЫ ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И С ВЫРОЖДЕННЫМИ ЯДРАМИ

https://doi.org/10.5281/zenodo.7663226

Арзикулов Г.П
PhD
Ташкентский государственный технический университет.

Received: 21-02-2023
Accepted: 22-02-2023
Published: 22-02-2023

Abstract:

Keywords:

About: FARS Publishers has been established with the aim of spreading quality scientific information to the research community throughout the universe. Open Access process eliminates the barriers associated with the older publication models, thus matching up with the rapidity of the twenty-first century.

Линейные уравнения и операторы с частными интегралами возникают в теории эластики [1], механики сплошных сред [2–4], аэродинамики [5] и в теории частных дифференциальных уравнений [6,7] и в ряде других задач [8–10]. Самосопряженные частично интегральные операторы возникают в теории дискретных операторов Шредингера (см. [11–14]). Надо отметить, что в 1975 г. Л.М. Лихтарников и Л.З.Витова [15] впервые начали изучать спектральные свойства линейных частично интегральных операторов типа Фредгольма. В работе [15] исследован спектр самосопряженного частично интегрального оператора (ЧИО) в пространстве L_2 с ядрами $h_1(x,s)\in L_2$ и $h_2(y,t)\in L_2$. В [16] изучен спектр ЧИО в L_2 с положительными ядрами. Затем А.С.Калитвин и П.П.Забрейко [17] в 1991 г. исследовали спектральные

свойства частично интегральных операторов в пространстве $L_p,\ p\ge 1$.

Во всех случаях в предыдущих работах ядро ЧИО являются функциями с двумя переменными. В настоящей работе изучаются спектральные свойства одного самосопряженного ЧИО в пространстве L_2 с ядрами трех переменных.

Пусть T_1 линейный интегральный оператор в пространстве $L_2([a,b]\times[c,d])$ заданный по формуле

$$(T_1 f)(x,y)=\int_a^b k(x,s,y)\,f(s,y)ds. \quad (1)$$

Здесь $k(x,s,y)$ измеримая функция на $[a,b]^2\times[c,d]$.

Ядро $k(x,s,y)$ интегрального оператора T_1 обычно удовлетворяет условие

$$\int_a^b k(x,s,y)\,f(s,y)ds\in L_2([a,b]\times[c,d]),\quad \forall f\in L_2([a,b]\times[c,d]).$$

Следовательно, оператор T_1 является линейным ограниченным оператором на $L_2([a,b]\times[c,d])$. Если, кроме того, ядро $k(x,s,y)$ удовлетворяет условию:

$k(x,s,y)=\overline{k(s,x,y)},$ для почти всех $y\in[c,d]$, тогда оператор T_1 является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2([a,b]\times[c,d])$.

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$ ортонормированная система функций из $L_2[a,b]$, и пусть $\{h_k(y)\}_{k=1}^n$ система существенно ограниченных вещественных функций на $[c,d]$.

Определим измеримую функцию $k_1(x,s,y)$ на $[a,b]^2\times[c,d]$ с помощью следующего правила:

$$k_1(x,s,y)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}h_k(y), \qquad (2)$$

тогда ЧИО T_1 с ядром $k_1(x,s,y)$ является самосопряженным ограниченным линейным оператор на $L_2([a,b]\times[c,d])$.

Пусть $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^m$ некоторая ортонормированная система функций из $L_2[c,d]$, $\{p_j(x)\}_{j=1}^m$ система существенно ограниченных вещественных функций на $[a,b]$. Определим измеримую функцию $k_2(x,t,y)$ на $[a,b]\times[c,d]^2$ по следующего правила:

$$k_2(x,t,y)=\sum_{j=1}^{m}p_j(x)\overline{\psi_j(t)}\psi_j(y), \qquad (3)$$

тогда ЧИО T_2 с ядром $k_2(x,t,y)$:

$$T_2 f(x,y)=\int_c^d k_2(x,t,y)f(x,t)d\mu_2(t),$$

есть линейный ограниченный самосопряженный оператор в $L_2([a,b]\times[c,d])$.

Для существенной ограниченной функции $\varphi\geq 0$ на измеримом множестве $\Omega\subset \mathrm{R}^{\nu}$, мы определим

$$ess\sup_{\Omega}(\varphi)=\inf\left\{C:\mu\left(\{\xi\in\Omega:\varphi(\xi)>C\}\right)=0\right\},$$

где $\mu(\cdot)$ мера Лебега на R.. Для измеримой функции φ на множество $\Omega\subset \mathrm{R}^{\nu}$, число $\lambda\in \mathrm{R}$ называется существенным значением функции φ, если

$$\mu\left(\{\xi\in\Omega:\lambda-\varepsilon<\varphi(\xi)<\lambda+\varepsilon\}\right)>0,$$

для всех $\varepsilon>0$. Обозначим через $Essran(\varphi)$ множество всех существенных значений функция φ.

Предложение 1. *а) Нуль является собственным значением T_1 бесконечной кратности;*

б) Число $\lambda_0 \neq 0$ является собственным значением T_1 тогда и только тогда, когда существует $1 \leq j_0 \leq n$ такой, что $\mu_2\left(h_{j_0}^{-1}\left(\{\lambda_0\}\right)\right) > 0.$

Доказательство. а) Обозначим через M подпространство гильбертова пространства $L_2[a,b]$ построенного ортогональной системой $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$. Тогда $\dim M = n,$ и для подпространства $\mathrm{H} = L_2[a,b]! \ M$, имеем $\dim \mathrm{H} = \infty.$

Пусть $\{g_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ ортонормированный базис в H, и $\psi(y) \in L_2[c,d], \|\psi\| = 1.$ Тогда $f_k(x,y) = g_k(x)\psi(y) \in L_2\left([a,b]\times[c,d]\right),$ $k \in \mathrm{N}$, и система $\{f_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ ортонормирован в $L_2\left([a,b]\times[c,d]\right)$.

Очевидно, что

$$T_1 f_k = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(s)} f_k(s,y)d\mu_1(s) = 0, \ \ k \in \mathrm{N},$$

т.е. нуль является собственным значением ЧИО T_1 бесконечной кратности.

б) *Достаточность.* Пусть $\lambda_0 \in \mathrm{C}\setminus\{0\}$ собственное значение ЧИО T_1. Тогда существует $f \in L_2\left([a,b]\times[c,d]\right),$ $\|f\| = 1$ такой, что $T_1 f = \lambda_0 f$.

Определим компактные самосопряженные интегральные операторы K_ω в $L_2[a,b]$ следующим образом:

$$K_\omega\varphi(x) = \int_a^b k_1(x,s,\omega)\varphi(s)d\mu_1(s), \ \ \omega \in \Omega_0,$$

где

$$\Omega_0 = \left\{\omega \in [c,d]: p_\omega(x,s) = k_1(x,s,\omega) \in L_2\left([a,b]^2\right)\right\}.$$

Имеем $\mu_2\left([c,d]\setminus\Omega_0\right) = 0$. Положим

$$\mathrm{M}_1 = \left\{\omega \in \Omega_0 : f_\omega(x) = f(x,\omega) \in L_2[a,b]\right\}.$$

Тогда $\mu_2\left(\mathrm{M}_1\right) > 0$.

Определим измеримые подмножества:

$$\mathrm{D}_k = \left\{\omega \in [c,d]: h_k(\omega) = \lambda_0\right\}, \ \ k \in \{1,...,n\}.$$

Положим

$$\mathrm{D}_0 = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{D}_k.$$

Пусть $\omega \in \mathrm{M}_1$. Тогда $K_\omega f_\omega = \lambda_0 f_\omega$, т.е. число λ_0 является собственным значением операторы $K_\omega,$ $\omega \in \mathrm{M}_1$. Определим через $\left\{\alpha_1^{(\omega)},...,\alpha_{n_\omega}^{(\omega)}\right\}$ о множество собственных значений оператора K_ω отличного от нуля.

Следовательно тогда $\lambda_0 \in \left\{\alpha_1^{(\omega)},\ldots,\alpha_{n_\omega}^{(\omega)}\right\} \subset \left\{h_1(\omega),\ldots,h_n(\omega)\right\}$, то есть существует $j_0 \in \{1,\ldots,n\}$ такое, что $h_{j_0}(\omega)=\lambda_0$.

Следовательно, мы имеем $\omega \in \mathrm{D}_0$. Таким образом, $\mathrm{M}_1 \subset \mathrm{D}_0$. Это означает, что $\mu_2\left(\mathrm{D}_0\right)>0$ т.е существует такое $j_0 \in \{1,\ldots,n\}$, что

$$\mu_2\left(\left\{\omega \in [c,d]: h_{j_0}(\omega)=\lambda_0\right\}\right)>0.$$

Необходимость. Пусть для $j_0 \in \{1,\ldots,n\}$, имеем $\mu_2\left(h_{j_0}^{-1}(\{\lambda_0\})\right)>0$. Положим D = $h_{j_0}^{-1}(\{\lambda_0\})$. Определим функцию $\psi \in L_2[c,d]$ следующим образом:

$$\psi(y)=\frac{\mathrm{X}_{\mathrm{D}}(y)}{\sqrt{\mu_2(\mathrm{D})}},\quad y\in[c,d],$$

где $\mathrm{X}_{\mathrm{D}}(y)$ – характеристическая функция множества D. Очевидно, $\|\psi\|=1$.

Пусть $f(x,y)=\varphi_{j_0}(x)\psi(y)$. Тогда $f \in L_2\left([a,b]\times[c,d]\right)$ и $\|f\|=1$. Другой стороны

$$T_1 f(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\int_a^b \overline{\varphi_k(s)}h_k(y)\varphi_{j_0}(s)\psi(y)d\mu_1(s)=\varphi_{j_0}(x)h_{j_0}(y)\psi(y)=\lambda_0 f(x,y),$$

то есть число λ_0 является собственным значением T_1.

Рассмотрим следующие проекторы P_k в пространстве $L_2\left([a,b]\times[c,d]\right)$:

$$P_k f(x,y)=\int_a^b \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}f(s,y)d\mu_1(s),\quad k\in\{1,\ldots,n\}.$$

Пусть $P=P_1+\ldots+P_n$ и $P_0=E-P$, тогда проекторы P_i и P_j $(i\neq j)$ ортогональны.

Имеет место следующее утверждение [61], [24]:

Предложение 2. *Если* $\lambda\neq 0$ *и* $\lambda \notin \bigcup_{k=1}^{n} Essran\left(h_k(y)\right)$, *то оператор* $T_1-\lambda E$ *обратимо в* $L_2\left([a,b]\times[c,d]\right)$, *и а оператор* $\left(T_1-\lambda E\right)^{-1}$ *ограниченный в* $L_2\left([a,b]\times[c,d]\right)$ *более того*

$$\left(T_1-\lambda E\right)^{-1} f(x,y)=-\frac{1}{\lambda}\left(f(x,y)-\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k(y)}{h_k(y)-\lambda}P_k f(x,y)\right).$$

Теорема 1. *Для спектра* $\sigma\left(T_1\right)$ *ЧИО* T_1 *с вырожденным ядром* k_1 *(2), справедлива следующая формула*

$$\sigma\left(T_1\right)=\{0\}\cup\left(\bigcup_{k=1}^{n} Essran\left(h_k(y)\right)\right).$$

Доказательство. По предложению 2, мы получаем

$$\sigma(T_1)\subset\{0\}\cup\left(\bigcup_{k=1}^{n}Essran\left(h_k(y)\right)\right).$$

Однако по предложению 1 имеем $0\in\sigma(T_1)$. Теперь мы докажем

$$\bigcup_{k=1}^{n}Essran\left(h_k(y)\right)\subset\sigma(T_1).$$

Пусть $\lambda_0\in Essran\left(h_{j_0}(y)\right)$, $\lambda_0\neq 0$ и t_0 произвольная точка из подмножество $h_{j_0}^{-1}(\{\lambda_0\})$.

Положим

$$\text{J}_i=\left\{t\in[c,d]:\frac{1}{i+1}<|t_0-t|<\frac{1}{i}\right\},\ \ i\in\mathrm{N}.$$

Тогда существует такое $n_0\in\mathrm{N}$, что $\mu_2(\text{J}_i)>0$ для всех $i\geq n_0$. Мы определим следующую последовательность ортонормированных функций $\mathrm{X}_p(y)\in L_2[c,d]$:

$$\mathrm{X}_p(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\mu_2(\text{J}_p)}}, & y\in\text{J}_p,\\ 0, & y\notin\text{J}_p.\end{cases}$$

где $p\geq n_0$. Определим через $f_p(x,y)\in L_2\left([a,b]\times[c,d]\right)$ ортонормированную систему функций: $f_p(x,y)=\varphi_{j_0}(x)\mathrm{X}_p(y),\ \ p\geq n_0$. Тогда

$$\left(T_1-\lambda_0E\right)f_p(x,y)=\left(h_{j_0}(y)-\lambda_0\right)f_p(x,y).$$

Следовательно,

$$\left\|\left(T_1-\lambda_0E\right)f_p\right\|\leq\sqrt{ess\sup\nolimits_{\text{J}_p}\left(h_{j_0}(y)-\lambda_0\right)^2},\ \ p\geq n_0.$$

Так как нуль является существенным значением функции $h_{j_0}(y)-\lambda_0$ то для больших $n_1\geq n_0$, существует достаточно малое число δ_{n_1} такое, что $\left|h_{j_0}(y)-\lambda_0\right|<\delta_{n_1}$, для почти всех $y\in\text{J}_p$, $p\geq n_1$.

Следовательно,

$$\left\|(T_1-\lambda_0E)f_p\right\|<\delta_{n_1},\ \ p\geq n_1,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\left(T_1-\lambda_0E\right)f_n\right\|=0$. Отсюда, и из критерия Вейля для существенного спектра самосопряженных операторов следует $\lambda_0\in\sigma_{ess}(T_1)\subset\sigma(T_1)$.

Предложение 3. *Любое собственное значение ЧИО T_1 бесконечно кратное.*

Доказательство. Пусть $\lambda\in\mathrm{R}\setminus\{0\}$ собственное значение T_1. Тогда существует $f_0\in L_2\left([a,b]\times[c,d]\right)$, $\|f_0\|=1$ такое, что $T_1f_0=\lambda f_0$.

Определим измеримое подмножество $\Omega_0 \subset [c,d]$:

$$\Omega_0 = \left\{ y \in [c,d] : \int_a^b |f_0(x,y)|^2 \, d\mu_1(x) \neq 0 \right\}.$$

Очевидно, что $\mu_2(\Omega_0) > 0$. Определим функцию:

$$f_0(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f_0(x,y)}{\sqrt{\int_a^b |f_0(s,y)|^2 \, d\mu_1(s)}}, & x \in [a,b], \quad y \in \Omega_0, \\ 0, & x \in [a,b], \quad y \notin \Omega_0. \end{cases}$$

Тогда $f_0 \in L_2([a,b]\times[c,d])$, и $f_0 \neq 0$.

Пусть $\{\tilde{\psi}_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ система ортонормированных функций из $L_2(\Omega_0)$. Рассмотрим последовательность функций из $L_2([a,b]\times[c,d])$:

$$f_k(x,y) = f_0(x,y)\psi_k(y), \quad k \in \mathrm{N},$$

где

$$\psi_k(y) = \begin{cases} \tilde{\psi}_k(y), & y \in \Omega_0, \\ 0, & y \notin \Omega_0. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_a^b \int_c^d |f_n(x,y)|^2 \, d\mu_1(x) d\mu_2(y) = \int_{\Omega_0} |\tilde{\psi}_n(y)|^2 d\mu_2(y) = 1,$$

и

$$(f_i, f_j) = \int_{\Omega_0} \tilde{\psi}_i(y)\overline{\tilde{\psi}_j(y)} d\mu_2(y) = 0, \quad i \neq j.$$

Очевидно, что

$$T_1 f_k(x,y) = \lambda \cdot f_k(x,y), \quad k \in \mathrm{N},$$

т.е. число λ является собственным значением ЧИО T_1 бесконечной кратности.

Следствие 1. *Дискретный спектр ЧИО T_1 с вырожденным ядром (2) отсутствует.*

Следствие 2. *Если каждая функция h_k, $k \in \{1,\ldots,n\}$ непрерывна и строго монотонен на $[c,d]$, то ЧИО T_1 имеет единственное собственное значение λ_0 и более того $\lambda_0 = 0$.*

Рассмотрим следующие проекторы Q_j в пространстве $L_2([a,b]\times[c,d])$:

$$Q_j f(x,y) = \int_c^d \psi_j(y)\overline{\psi_j(t)} d\mu_2(t), \quad j \in \{1,\ldots,m\}.$$

Предложение 4. *Если* $\lambda \neq 0$ *и* $\lambda \notin \bigcup_{j=1}^{m} Essran\left(p_j(x)\right)$, *то оператор* $T_2 - \lambda E$ *обратимо на* $L_2([a,b]\times[c,d])$, *а оператор* $(T_2 - \lambda E)^{-1}$ *ограниченный в* $L_2([a,b]\times[c,d])$, *более того*

$$(T_2 - \lambda E)^{-1} f(x,y) = -\frac{1}{\lambda}\left(f(x,y) - \sum_{j=1}^{m} \frac{p_j(x)}{p_j(x) - \lambda} Q_j f(x,y) \right).$$

Теорема 2. *Для спектра* $\sigma(T_2)$ *ЧИО* T_2 *с вырожденным в ядре* k_2 *(3), справедлива следующая формула:*

$$\sigma(T_2) = \{0\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} Essran\left(p_j(x)\right) \right).$$

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений, – М., Л., 1948.

[2] Александров В.М., Коваленко Е.В. Об обдом классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред, – ДАН СССР, 1980, Т.252, №3, С.324–328.

[3] Александров В.М., Коваленко Е.В. О контактном взаимодейтствие тел с покрытиями, – ДАН СССР, 1984, Т.275, №4, С.827–830.

[4] Манжиров А.В. Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений симметричных контактных задач для тел со сложной реологией, – Прикл.мат. и мех., 1985, Т.43, вып.6, С.1019–1025.

[5] Калитвин А.С. О некоторых класса частично интегральные уравнения в аэродинамики – Сост. Персп. Разв. Науки и Технике под Липецком обл., Липецк, 1994, С.210–212.

[6] Гурса Э. Курс математического анализа, Т.3., Ч.2, – М.– Л., 1934.

[7] Мюнтц Г. Интегральные уравнения, Т.1, – Л.–М., 1934.

[8] Appell J., Kalitvin A.S., Nashed M.Z. On some Partial Integral Equations arising in the mechanics of solids, Zeitschr. Angew. Math. Mech. – 1999, v.79, № 10., P.703-713.

[9] Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. – Воронеж, 2000.

[10] Appell J., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations, – New York, 2000.

[11] Ю.Х. Эшкабилов Об одном дискретном "трехчастичном"операторе Шредингера в модели Хаббарда, – ТМФ, 149:2, 2006, 228–243.

[12] S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov On the Number of Eigenvalues of a Model Operator Associated to a System of Three-Particles on Lattices, – Russ. J. of Math. Phys., 14:4, 2007, 377–387.

[13] Т.Х. Расулов Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке, - ТМФ, 163:1, 2010, 34-44.

[14] Ю.Х. Эшкабилов, Р.Р. Кучаров О существенном и дискретном спектре трехчастичного оператора Шредингера на решетке, – ТМФ, 170:3, 2012, 409–422.

[15] Л.М. Лихтарников, Л.З. Витова О спектре интегрального оператора с частными интегралами, - Литовск. мат.сб., 1975, Т. 15, № 2, С. 41-47.

[16] А.С. Калитвин О спектре линейных операторов с частными интегралами и положительными ядрами, -Межвузовский. сб.науч.тр.: Операторы и их приложения, Ленинград, ЛГПИ, 1988, с.43-50.

[17] A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko On the theory of partial integral operators, -J. Integral Equations and Appl., 1991, v. 3, № 3, P. 351-382.

[18] Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, ИЛ,М,1960.

[19] Yu.Kh.Eshkabilov, G.P.Arzikulov Spectrum of partial integral operators with degenerate kernels, Uzbekistan, TDPU, 2013, P. 36-37.