FARS PUBLISHERS
Foundation of Advanced Research Scholar's
International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-10| 2023 Published: |22-10-2023|

УДК 517.927.2.

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ БИР ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН 1-ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

https://doi.org/10.5281/zenodo.8415296

Д.У.Жўраева
ТАТУ Фарғона филиали

Аннотация

Ушбу мақолада иккинчи тартибли сингуляр коэффициентли бир оддий дифференциал тенглама учун чегаравий масала қўйилган ва тадқиқ этилган. Ушбу масала ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги исботланган.

Аннотация

В статье исследована краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярным коэффициентом. Доказана единственность и существование решения рассматриваемой задачи.

Annotation

In the article boundary value problem was investigated for second order ordinary differential equation with singular coefficients. The uniqueness and existence of the solution of the considered problem was proved.

Калит сўзлар

чегаравий масала, иккинчи тартибли дифференциал тенглама, сингуляр коэффициент, ягона ечим, ечим мавжудлиги.

Ключевые слова

краевая задача, дифференциальное уравнение второго порядка, сингулярный коэффициент, единственность решения, существование решения.

Keywords

boundary value problem, second order differential equation with singular coefficients, uniqueness of the solution, existence of the solution.

Масаланинг қўйилиши. $D=\{(x,0);\ 0\le x\le p\}$ соҳада

$$y''+\frac{2\gamma}{x}y'+\sqrt{\lambda}y=f(x), \qquad x\in(0,p) \qquad (1)$$

дифференциал тенгламани ва

$$y(0)=k_1, \qquad y(p)=k_2 \qquad (2)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $y(x)$ функция топилсин. Бу ерда $f(x)$ - берилган узлуксиз функция, k_1 ва k_2 -берилган ҳақиқий сонлар.

Теорема. *Агар* $0<\gamma<\frac{1}{2}$, $\lambda>0$, $J_{\frac{1}{2}-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)\neq 0$, *бўлса, у ҳолда* $\{(1),(2)\}$ *масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.*

Исбот. Масала ечимининг ягоналиги. Фараз қиламиз масала иккита $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин. Уларнинг айирмасидан тузилган

$$y(x)=y_1(x)-y_2(x) \tag{3}$$

функция $[0;p]$ сегментда

$$y''+\frac{2\gamma}{x}y'+\sqrt{\lambda}y=0, \qquad x\in(0,p) \tag{1'}$$

дифференциал тенгламани ва

$$y(0)=0, \qquad y(p)=0 \tag{2'}$$

бошланғич шартларни қаноатлантиради.

Маълумки, $(1')$ тенгламанинг умумий ечими

$$y(x)=C_1x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right). \tag{4}$$

кўринишда топилади.

(4) ечимни $(2')$ шартларга бўйсундирсак $C_2=0$,

$$C_1\sqrt{\lambda}p^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)=0,$$

Теорема шартига асосан $J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)\neq 0$ бўлгани учун охирги тенгликдан $C_1=0$ эканлиги келиб чиқади. Бундан $\{(1'),(2')\}$ бир жинсли масаланинг ечими $y(x)\equiv 0$ бўлишини топамиз. Бу эса, (3) тенгликка асосан, $y_1(x)=y_2(x)$ бўлишини, яъни $\{(1),(2)\}$ масала ечимга эга бўлса, у ягона бўлишини билдирди.

Масала ечимининг мавжудлиги. Маълумки, (1) тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$y(x)=C_1x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right) \tag{6}$$

кўринишда топилади.

FARS PUBLISHERS Foundation of Advanced Research Scholar's
International Journal of Education, Social Science & Humanities. Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-10| 2023 Published: |22-10-2023|

Энди (1) тенгламанинг умумий ечимини топиш билан шуғулланимиз. Бунинг учун (6) ифодадаги C_1 ва C_2 ўзгармасларни x ўзгарувчиларга боғлиқ функция деб хисоблаб, уни

$$y(x)=C_1(x)x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2(x)x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right) \qquad (7)$$

кўринишда ёзиб оламиз. (7) ни (1) тенгламага қўйиб $C_1'(x)$ ва $C_2'(x)$ ларга нисбатан

$$\begin{cases} C_1'(x)x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2'(x)x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right)=0, \\ C_1'(x)x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{-1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2'(x)x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{\gamma+1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}f(x) \end{cases}$$

чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу ердан $C_1'(x)$ ва $C_2'(x)$ ларни бир қийматли топиб, сўнгра уларни $[0;x]$ сегментда интеграллаб, $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ ларни топамиз:

$$C_1(x)=\frac{\pi}{2\cos\gamma\pi}\int_0^x t^{\gamma+1/2}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}t\right)f(t)dt+C_1$$

$$C_2(x)=\frac{\pi}{2\cos\gamma\pi}\int_0^x t^{\gamma+1/2}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}t\right)f(t)dt+C_2.$$

.

Буларни (7) га қўйиб, (1) тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$y(x)=C_1x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+$$

$$+\frac{\pi x^{1/2-\gamma}}{2\cos\gamma\pi}\int_0^x\left[J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}t\right)-J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right)J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}t\right)\right]t^{1/2+\gamma}f(t)dt \qquad (8)$$

(8) ечимни (2) шартларга бўйсиндириб, (1) тенгламанинг (2) чегаравий шартларини қаноатлантирувчи ечимини

$$y(x)=k_1\Gamma\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{2}\right)^{1/2-\gamma}\frac{J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right)J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)-J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}p\right)}{J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)}+$$

$$+k_2\left(\frac{x}{p}\right)^{1/2-\gamma}\frac{J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)}{J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)}+\frac{\pi}{2\cos\gamma\pi}\int_0^p G(x,t,p)t^{2\gamma}f(t)dt$$

кўринишда топамиз. Бу ерда,

$$G(x,t,p)=\begin{cases}\dfrac{J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}t\right)}{J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)}(xt)^{\frac{1}{2}-\gamma}\left[J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}p\right)-J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right)J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)\right], 0\le t\le x,\\ \dfrac{J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)}{J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)}(tx)^{\frac{1}{2}-\gamma}\left[J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}t\right)J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}p\right)-J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}t\right)J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)\right], \quad x\le t\le p.\end{cases}$$

Теорема тўла исботланди.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. Ж.Н.Ватцон. Теория бесселовых функции. -Т. 1. -М.: Изд. ИЛ, 1949. -798 с.

2. Н.Лебедов. Специальные функции и их приложения. -Москва, 1963. -359 с.

3. А.Қ.Ўринов. Махсус функциялар ва махсус операторлар. -Фарғона 2012 й. -112 б.

4. М.С.Азизов, Д.У. Қобилжонова. Иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган сингуляр коэффициентли бир оддий дифференциал тенглама учун икки нуқтали чегаравий масала. “ Илим хам таьлим-тарбиянинг ахамиятли масалалари “ Республика илмий конференцияси. Нукус – 2019. 151-152 б.

5. Jo’raeva, D. (2022). BUZILADIGAN ODDIY DIFFERENTSIAL TENGLAMA UCHUN BIRINCHI CHEGARAVIY MASALA. O'ZBEKISTONDA FANLARARO INNOVATSIYALAR VA ILMIY TADQIQOTLAR JURNALI, 2(13), 456-461.

6. Tolipov, N., Xudoynazarov, Q., & Munavarjonov, S. (2023). ОБ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛУШАРЕ. Research and implementation.

7. Tolipov, N., Isaxonov, X., & Zunnunov, M. (2023). SHAR TASHQARISIDAGI SOHA UCHUN GARMONIK DAVOM ETTIRISH MASALASI. Research and implementation.

8. Isaqovich, T. N. (2023). Chorak doira tashqarisida bigarmonik tenglama uchun nokorrekt qoʻyilgan masala. Talqin va tadqiqotlar ilmiy-uslubiy jurnali, 1(18), 73-83.