International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-10| 2023 Published: |22-10-2023|

РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ С ПОМОЩЬЮ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

https://doi.org/10.5281/zenodo.10010032

Б.С.Далиев
Ферганский филиал Ташкентского университета информационных технологий,
bahtiyordaliyev@gmail.com

1. Введение

Интегральное уравнение считается наиболее эффективным инструментом моделирования различных технических и физических явлений, имеющим огромное количество приложений в чистой и прикладной математике. Их можно в целом разделить на Вольтерра, Фредгольма, однородные и неоднородные интегральные уравнения. Разнообразные интегральные уравнения постоянно возникают во многих физических задачах науки и техники, таких как электроника, оптимизация, микроскопия, спектроскопия плазмы, механика и т. д

В данной работе предлагается схема решения обобщенных интегральных уравнений Абеля первого рода с помощью оптимальных квадратурных формул. Дробное исчисление играет важную роль, поскольку интегральные уравнения Абеля могут быть хорошо описаны относительно дробных интегралов. Основной мотив этого метода - использовать преимущества свойств дробных интегралов. Использование метода оптимальных квадратурных формул помогает аппроксимировать дробный интеграл, и, таким образом, исходная задача сводится к более простой вид. Приведенные численные примеры и оцененные погрешности характеризуют применимость и эффективность метода.

2. Уравнения Абеля

В этом разделе мы представляем необходимые детали интегрального уравнения Абеля. Интегральное уравнение Абеля тесно связано понятием дробного интегрирования. Поэтому удобно начать решения интегрального уравнения Абеля.

Интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} = f(x), \qquad (1)$$

где $0<\alpha<1$, называется уравнением Абеля. Уравнения (1) рассматривается на конечном отрезке $[0,\ 1]$.

Уравнение (1) решается следующим образом. Подменяя в (1) x на t, умножая обе части равенства (1) на $(x-t)^{\alpha-1}$ и проинтегрировав, получим

$$\int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{\varphi(s)\,ds}{(t-s)^\alpha} = \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \qquad (2)$$

Пользуясь частным случаем известной теоремы Фубини, т. е. равенством так называемой формулой Дирихле[1-4], в левой части равенство (2) получим

$$\int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{\varphi(s)\,ds}{(t-s)^\alpha} = \int_0^x \varphi(s)\,ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-s)^\alpha} \qquad (3)$$

Заменой $t=s+\tau(x-s)$ внутренней интеграл в правой части (3) приводим к виду

$$\int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-s)^\alpha} = \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau^\alpha(1-\tau)^{1-\alpha}}. \qquad (4)$$

Видно, что правая часть (4) является Бета функцией Эйлера

$$\int_0^1 \frac{d\tau}{\tau^\alpha(1-\tau)^{1-\alpha}} = B(\alpha,\ 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}. \qquad (5)$$

Тогда в силу (2), (3), (4) и (5) имеем

$$\int_0^x \varphi(s)\,ds = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \qquad (6)$$

Отсюда дифференцируя обе части (6), находим неизвестную функцию

$$\varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \qquad (7)$$

Таким образом если уравнение (1) имеет решение, то это решение необходимо имеет вид (7) и, следовательно единственное. Следует отметить, что интеграл в правой части (6) называется интегралами дробного порядка α, а правая часть (7) называется дробной производной порядка α. Решение интегрального уравнение Абеля (1) можно написать и в другой форме. Для этого функцию $f(t)$ напишем в виде

$$f(t)=f(0)+\int_0^t f'(s)ds \tag{8}$$

Подставляя в (7) вместо $f(t)$ выражение (8) после некоторых упрощений, окончательно получаем

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}}+\int_0^t\frac{f'(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}}\right] \tag{9}$$

Выражение (9) является аналитическим решением интегрального уравнения Абеля (1). В следующих разделах мы будем заниматься приближенным вычислением интеграла (9) и тем самим получаем приближенное аналитическое решение интегрального уравнения Абеля.

3. Приближенные формулы.

Общая задача теории численного интегрирования функций одной переменной состоит в том, чтобы приближенно найти интеграл

$$I(\varphi)=\int_0^t\frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}}=\int\frac{\varepsilon_{[0,t]}(x)\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \tag{10}$$

Здесь $0<\alpha<1$, $\varepsilon_{[0,t]}(x)$ - характеристическая функция отрезка $[0,t]$.

Искомое приближение будем искать в виде линейной комбинации значений функции $\varphi(x)$ и ее производные до порядка ν, $\varphi^{(\nu)}(x)$ в $N+1$ точках

$[\beta]=h\beta$ *называемых узлов*, $h=\dfrac{t}{N}$, $N=1,2,...,$ $\beta=0,1,2,...,N,$ $t>0,$ $0\le\nu\le\rho$

$$I^*(\varphi)=\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{\rho}C^{(\nu)}[\beta]\varphi^{(\nu)}[\beta]=\int\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{\rho}(-1)^{\nu}C^{(\nu)}[\beta]\delta^{(\nu)}(x-h\beta)\varphi(x)dx\,, \tag{11}$$

где $\delta(x)$-известная Дельта функция Дирака.

Тогда следующая формула называется квадратурной формулой

$$\int_0^t\frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}}\cong\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{\rho}C^{(\nu)}[\beta]\varphi^{(\nu)}[\beta] \tag{12}$$

Здесь $C^{(\nu)}[\beta]$ коэффициенты квадратурной формулы,$[\beta]=h\beta$ узлы формулы.

Квадратурной формуле (12) сопоставим функционал погрешности

$$(l,\varphi)=I(\varphi)-I^*(\varphi)=\int\left[\frac{\varepsilon_{[0,t]}(x)}{(t-x)^{1-\alpha}}-\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{\rho}(-1)^{\nu}\delta(x-h\beta)\right]\varphi(x)dx\,. \tag{13}$$

Он является линейным, так как мы требуем независимости правил, указывающих узлы $[\beta]=h\beta$ коэффициенты $C^{(\nu)}[\beta]$, от выбора конкретной интегрируемой функции [5-10].

Интегрируемые функции считаем элементами пространства Соболева $L_2^{(m)}(0,t)$- классов функций, обладающих производными порядка m (в обобщенном смысле) интегрируемым с квадратом и нормой

$$\left\|\varphi / L_2^{(m)}\right\| = \left[\int_0^t (\varphi^{(m)}(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} . \tag{14}$$

О качестве квадратурной формулы будем судить, исходя из оценки величины

$$\sup_{\left\|\varphi/L_2^{(m)}\right\|=1} \left|(l,\varphi)\right| . \tag{15}$$

Естественно рассматривать последовательность квадратурных формул с погрешностями (l,φ) с увеличивающимся числом узлов N. Сходимость функционалов $l(x)$ к нулю может быть сильной или слабой. Задание квадратурной формулы (12) равносильно заданию функционала погрешности

$$l(x) = \frac{\varepsilon_{[0,t]}(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{\rho}(-1)^{\nu} C^{(\nu)}[\beta]\delta^{(\nu)}(x-h\beta) \tag{16}$$

Линейную комбинацию δ- функций в этом равенстве будем называть точечной частью функционала $l(x)$. Переменными параметрами квадратурной формулы (12) являются коэффициенты $C^{(\nu)}[\beta]$, $\beta=0,1,\ldots,N$. Оптимальной квадратурной формулой будем считать такую, функционал погрешности которой при заданном числе узлов N имеет наименьшую норму в $L_2^{(m)^*}(0,t)$.

4. Заключение

Разработана новая техника, основанная на оптимальных квадратурных формулах, которая применяется для получения приближенных решений обобщенных интегральных уравнений Абеля. Предлагаемый алгоритм очень эффективен и предельно точен.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Шадиметов Х.М. Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева. – Ташкент: Фан ва технология, 2019.

2. Далиев, Б. С. (2021). Оптимальный алгоритм решения линейных обобщенных интегральных уравнений Абеля. *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, *5*(35), 120-129.

3. Shadimetov, K. M., & Daliev, B. S. (2022). Optimal formulas for the approximate-analytical solution of the general Abel integral equation in the Sobolev space. *Results in Applied Mathematics*, *15*, 100276.

4. Далиев, Б. С. (2022). О Численном Решении Линейных Обобщенных Интегральных Уравнений Абеля. *Periodica Journal of Modern Philosophy, Social Sciences and Humanities*, *13*, 191-198.

5. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Bozarov B.I. Optimal quadrature formulas for oscillatory integrals in the Sobolev space. Journal of inequalities and applications. Springer. 2022.

6. Hayotov A.R., Bozarov B.I. Optimal quadrature formula with cosine weight function. Problems of Computational and Applied Mathematics. 2021. Vol. 4, No 34, pp 106-118.

7. Bozarov, B. I. An optimal quadrature formula with sinx weight function in the Sobolev space. *Uzbekistan academy of sciences vi romanovskiy institute of mathematics*, 2019, pp 47.

8. Bozarov B.I., Shaev A.K. Norm of the error functional for the optimal quadrature formula with cosine weight in the Sobolev space. Problems of Computational and Applied Mathematics. 2023, Vol 50, No:3 (1), pp.

9. Rashidjon, R., & Sattorov, A. (2021). Optimal Quadrature Formulas with Derivatives in the Space. *Middle European Scientific Bulletin*, *18*, 233-241.

10. Расулов, Р., Сатторов, А., & Махкамова, Д. (2022). Вычисленние Квадрат Нормы Функционала Погрошности Улучшенных Квадратурных Формул В Пространстве. *Central asian journal of mathematical theory and computer sciences*, *3*(4), 114-122.

11. Akbarov, D. E. Umarov Sh. A.(2020). The Application of Logical Operations and Tabular Transformation in the Base Assents of Hash-Function Algorithms. *Computer Reviews Journal*, *6*, 11-18.

12. Акбаров, Д. Е., & Умаров, Ш. А. (2018). Выбор эллиптической кривой и базовой точки при разработке алгоритма сложения её точек с рациональными координатами на конечном поле.

13. Акбаров, Д. Е., & Умаров, Ш. А. (2020). Алгоритм электронной цифровой подписи на основе композиции вычислительных сложностей: дискретного логарифмирования, разложения на простые множители и сложения точек эллиптической кривой. *Автоматика и программная инженерия*, (2 (32)), 29-33.

14. Умаров, Ш. А., & Акбаров, Д. Е. (2016). Разработка нового алгоритма шифрования данных с симметричным ключом. *Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии*, *9*(2), 214-224.

15. Akbarov, D. E., Kushmatov, O. E., Umarov, S. A., Bozarov, B. I., & Abduolimova, M. Q. (2021). Research on General Mathematical Characteristics of Boolean Functions' Models and their Logical Operations and Table Replacement in Cryptographic Transformations. *Central asian journal of mathematical theory and computer sciences*, *2*(11), 36-43.

16. Farkhodovich, T. D. (2022). The Problem of Forming Interpersonal Tolerance in Future Teachers. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology*, *2*(4), 12-15.