International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-10| 2023 Published: |22-10-2023|

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ВОГНУТОЙ ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

https://doi.org/10.5281/zenodo.10043254

Саидов М.И
ассистент Ферганского филиала ТАТУ.

В настоящей работе ставится и изучается одна краевая задача для уравнения

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0 \quad (1)$$

в вогнутой шестиугольной области D, где

$$a,b,c\in R,\ Lu\equiv\begin{cases}L_1u\equiv u_{xx}-u_y \ \text{в}\ D_1,\\ L_iu\equiv u_{xx}-u_{yy}\ \text{в}\ D_i\ (i=2,3),\end{cases}$$

$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup J_1\cup J_2$, $D_1=\{(x,y)\in R^2: 0<x<1,\ 0<y\le 1\}$,

$D_2=\{(x,y)\in R^2: 0<x<1,\ x-1<y<0\}$, $AB=\{(x,y)\in R^2: y=0,\ 0<x<1\}$,

$D_3=\{(x,y)\in R^2:\ 0<y<1,\ y-1<x<0\}$, $AA_0=\{(x,y)\in R^2: x=0,\ 0<y<1\}$,

то есть $D-$ вогнутая шестиугольная область с вершинами в точках $A(0,0)$, $C(0,-1)$, $B(1,0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$, $D(-1,0)$.

Краевую задачу для уравнения (1) поставим только в случае $a=1,\ b=-1$.

<u>**Задача 1.**</u> Требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$;
2) удовлетворяет уравнению (1) в каждой из областей $D_i\ (i=1,2,3)$;
3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(1,y)=\varphi_1(y),\quad 0\le y\le 1, \quad (2)$$

$$u_x(1,y)=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le 1, \quad (3)$$

$$u|_{BC}=\psi_1(x),\ 0\le x\le 1, \quad (4)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_2(x),\ 0\le x\le 1, \quad (5)$$

$$u(x,0)=f_1(x),\quad -1\le x\le 0, \quad (6)$$

$$u_y(x,0)=f_2(x),\quad -1\le x\le 0, \quad (7)$$

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-10| 2023 Published: |22-10-2023|

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{A_0D} = \psi_3(y),\ 0 \le y \le 1, \tag{8}$$

4) и непрерывным условиям склеивания на линии изменения типа:

$$u_2(x,\ 0) = u_1(x, +0) = \tau_1(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{9}$$

$$u_{2y}(x,\ 0) = u_{1y}(x,\ 0) = \nu_1(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{10}$$

$$u_{2yy}(x,\ 0) = u_{1yy}(x,\ 0) = \mu_1(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{11}$$

$$u_3(0,\ y) = u_1(0,\ y) = \tau_2(y),\ 0 \le y \le 1, \tag{12}$$

$$u_{3x}(0,\ y) = u_{1x}(0, y) = \nu_2(y),\ 0 \le y \le 1, \tag{13}$$

где $\varphi_i\ \left(i = \overline{1,2}\right), \psi_j\ (j = 1,2,3),\ f_k\ (k = 1,2)$ – заданные достаточно гладкие функции, n – внутренняя нормаль к прямым $x - y = 1$ и $x - y = -1$, а $\tau_1, \nu_1, \tau_2, \nu_2, \mu_1$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению. Здесь введено обозначение

$$u(x, y) = u_i(x, y),\ (x, y) \in D_i\ \ (i = 1, 2, 3). \tag{14}$$

Здесь мы укажем лишь идею решения поставленной задачи. В этом случае уравнение (1) имеет вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + c\right)(Lu) = 0. \tag{15}$$

Это уравнение можно привести к уравнению второго порядка с неизвестной правой частью следующим образом: введя обозначение $Lu = v$, получим уравнению $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + cv = 0$. Общее решение последнего уравнения имеет вид: $v = \omega(x + y)\exp(cy)$. Тогда получим $Lu_i = \omega_i(x + y)\exp(cy)$.

Последнее уравнение можно записать в виде

$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1(x + y)\exp(cy),\ (x, y) \in D_1$, (16)

$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_i(x + y)\exp(cy),\ (x, y) \in D_i,\ \ (i = 2,3)$, (17)

где $\omega_i(x + y)\ (i = 1, 2, 3)$ – произвольные достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Для решения поставленной задачи области D_2 и D_3 разделим по две части каждую с помощью отрезка $E_1E_2 = \left\{(x, y) \in R^2 : y = -x,\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right\}$. Тогда эти области можно записать в виде

$$D_2 = D_{21} \cup D_{22} \cup AE_1,\ \ D_3 = D_{31} \cup D_{32} \cup AE_2, \text{где } E_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),\ E_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$D_{21} = \left\{(x, y) \in R^2 : -\frac{1}{2} < y < 0, -y < x < y + 1\right\}, D_{22} = \left\{(x, y) \in R^2 : 0 < x < \frac{1}{2},\ x - 1 < y < -x\right\},$$

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-10| 2023 Published: |22-10-2023|

$$D_{31}=\left\{(x,y)\in R^2: 0<y<\frac{1}{2},\ y-1<x<-y\right\},\ AE_1=\left\{(x,y)\in R^2: 0<x<\frac{1}{2},\ y=-x\right\},$$

$$D_{32}=\left\{(x,y)\in R^2: -\frac{1}{2}<x<0,\ -x<y<x+1\right\},\ AE_2=\left\{(x,y)\in R^2: 0<y<\frac{1}{2},\ x=-y\right\}.$$

В уравнение (17) $(i=2)$ введем обозначения

$u_2(x,y)=u_{2k}(x,y),\ \omega_2(x+y)=\omega_{2k}(x+y)$ при $(x,y)\in D_{2k}$ $(k=1,2)$.

Тогда уравнение (17) имеет вид

$u_{2kxx}-u_{2kyy}=\omega_{2k}(x+y)\exp(-cy)$ $(k=1,2)$. (18)

Сначала поставленную задачу 1 будем исследовать в области D_2.

Записываем решение уравнения (18) ($k=1$), удовлетворяющее условиям (9), (10):

$$u_{21}(x,y)=\frac{\tau_1(x+y)+\tau_1(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu_1(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^y\exp(c\eta)d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\omega_{21}(\xi+\eta)d\xi. \quad (19)$$

Подставляя это решение в (5), после некоторых выкладок находим неизвестную функцию $\omega_{21}(x+y)$ в промежутке $0\le x+y\le 1$.

Затем подставляя (19) в (4), после некоторых вычислений имеем первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$\nu_1(x)=\alpha(x)-\tau_1'(x)$, (20)

где $\alpha(x)$ – известная функция.

Теперь в области D_1, раскрывая скобки в (15) и полагая $y\to 0$ в полученном уравнении и в уравнении (18) ($k=1$), получим еще два соотношения между $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$\tau_1'''(x)-\nu_1'(x)-\nu_1''(x)+\mu_1(x)+c\tau_1''(x)-c\nu_1(x)=0,$

$\mu_1(x)=\tau_1''(x)-\omega_{21}(x).$

Исключая из этих уравнений и (20) функции $\nu_1(x)$, и $\mu_1(x)$ и интегрируя полученное уравнение от 0 до x, приходим к уравнению:

$2\tau_1''(x)+(2+c)\tau_1'(x)+\tau_1(x)=\beta(x)+k_1,$

где $\beta(x)$ – известная функция, а k_1 – неизвестная константа, подлежащая определению.

Решая последнее уравнение и удовлетворяя условиям $\tau_1(0)=f_1(0)$, $\tau_1'(0)=f_1'(0)$, $\tau_1(1)=\varphi_1(0)$, находим $\tau_1(x)$ и тем самым – функции $\nu_1(x)$, $u_{21}(x,y)$ в области D_{21}.

Затем введя обозначения $u_{22}(0,y)=\tau_3(y), u_{22x}(0,y)=\nu_3(y)$ $(-1\le y\le 0)$ где $\tau_3(y)$ $\nu_3(y)$ – неизвестные пока функции, подлежащие определению, и записывая решение уравнения (18) $(k=2)$, удовлетворяющее этим условиям, и

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-10| 2023 Published: |22-10-2023|

подставляя это решение в условия (5) и (4), соответственно находим неизвестную функцию $\omega_{22}(x+y)$ при $-1 \le x+y \le 0$ и получим первое соотношение между $\tau_3(x)$ и $\nu_3(x)$.

Пользуясь условием $u_{22}(x,-x)=u_{21}(x,-x)$, мы получим еще одно соотношение между неизвестными функциями $\tau_3(x)$ и $\nu_3(x)$. Из полученных этих двух соотношений находим эти функции. Тем самым – и функцию $u_{22}(x,y)$ в области D_{22}. Таким образом, мы нашли функцию $u_2(x,y)$ в области D_2 единственным образом.

Переходим в область D_3. Аналогично, как и в области D_2, определяются неизвестные функции $\omega_{31}(x+y)$ и $\omega_{32}(x+y)$.

В области D_3 при $x \to 0$ из формулы решения мы получим одно

соотношение между неизвестными функциями $\tau_2(y)$, $\nu_2(y)$:

$$\tau_2'(y)-\nu_2(y)=\gamma(y), 0 \le y \le 1,$$

здесь $\gamma(y)$ – известная функция.

Переходим в область D_1. В уравнении (16) переходя к пределу при $y \to 0$ и заменяя x на $x+y$, находим:

$$\omega_{11}(x+y)=\tau_1''(x+y)-\nu_1(x+y),\ 0 \le x+y \le 1,$$

где положено $\omega_1(x+y)=\begin{cases}\omega_{11}(x+y),\ \textit{если}\ 0 \le x+y \le 1,\\ \omega_{12}(x+y),\ \textit{если}\ 1 \le x+y \le 2.\end{cases}$

Теперь запишем решение уравнения (16), удовлетворяющее условиям (2), (12), (13). Дифференцируем это решение по x. Затем в полученном равенстве переходим к пределу при $x \to 0$ и $x \to 1$. Тогда получим еще два соотношения между функциями $\tau_2(y)$, $\nu_2(y)$ и $\omega_{12}(y)$. Исключая из полученных трех соотношений функцию $\nu_2(y)$, приходим к системе двух интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно функции $\tau_2'(y)$ и $\omega_{12}(y)$. Ядро этих уравнений имеет слабую особенность, а правые части непрерывны. Поэтому эта система допускает единственное решение из класса непрерывных функций. Решая эту систему, находим функции $\tau_2'(y)$, и $\omega_{12}(y)$ и тем самым – функции $\tau_2(y)$, $\nu_2(y)$, $u_1(x,y)$ и $u_3(x,y)$.

Таким образом, мы нашли единственное решение задачи 1.

В работах [1, 2] рассмотрен ряд краевых задач для таких уравнений.

ЛИТЕРАТУРА:

16. Maniyozov, O., Shokirov, A., & Islomov, M. (2023). MATRITSALARNI ARXITEKTURA VA DIZAYN SOXASIDA TATBIQI. *Research and Implementation*. извлечено от https://fer-teach.uz/index.php/rai/article/view/1007.

17. Jo'raeva, D. (2022). BUZILADIGAN ODDIY DIFFERENTSIAL TENGLAMA UCHUN BIRINCHI CHEGARAVIY MASALA. O'ZBEKISTONDA FANLARARO INNOVATSIYALAR VA ILMIY TADQIQOTLAR JURNALI, 2(13), 456-461.

18. To'xtasinov, D. F. (2018). Didactic Bases Of Development Of Logical Thinking In Schoolchildren. *Central Asian Journal of Education*, *2*(1), 68-74.

19. Ergashev, T. G., & Tulakova, Z. R. (2021). The Dirichlet problem for an elliptic equation with several singular coefficients in an infinite domain. *Russian Mathematics*, *65*(7), 71-80.

20. Tolipov, N., Isaxonov, X., & Zunnunov, M. (2023). SHAR TASHQARISIDAGI SOHA UCHUN GARMONIK DAVOM ETTIRISH MASALASI. Research and implementation.

21. Madibragimova, I. M. (2023). MATEMATIKA DARSLARIDA MUAMMOLI TA'LIM. *PRINCIPAL ISSUES OF SCIENTIFIC RESEARCH AND MODERN EDUCATION*, *2*(6).

22. Yusupov, Y. A. (2018). Algorithms for adaptive identification of parameters of stochastic control objects. *Chemical Technology, Control and Management*, *2018*(2), 74-77

23. Saidov, M., & Isroilov, S. (2023). TO'RTINCHI TARTIBLI BIR JINSLI BO'LMAGAN TENGLAMA UCHUN ARALASH MASALA. Research and implementation.

24. Isaqovich, T. N. (2023). Chorak doira tashqarisida bigarmonik tenglama uchun nokorrekt qo 'yilgan masala. Talqin va tadqiqotlar ilmiy-uslubiy jurnali, 1(18), 73-83.

25. Bozarov B.I. Optimal quadrature formulas with the trigonometric weight in the Sobolev space // Bulletin of the Institute of Mathematics, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics. – Tashkent, 2020. no 4. pp.1-10.

26. Жўраева, Д. (2023, October). 4-Я КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. In *Conference on Digital Innovation:" Modern Problems and Solutions"*.

ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-11| Issue-10| 2023 Published: |22-10-2023|

27. Жўраева, Д. (2023, October). 1-Я КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. In *Conference on Digital Innovation:" Modern Problems and Solutions"*.

28. 3-Я КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. *Conference on Digital Innovation : "Modern Problems and Solutions"*.

29. Artikbayeva, Z., Abdumajitova, M., Umirova, M., & Jo'Rayeva, D. (2023). EDUCATIONAL TECHNOLOGIES AS AN EFFECTIVE METHOD IN THE MEANINGFUL ORGANIZATION OF PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS LESSONS. *Science and innovation*, *2*(B3), 70-72.

30. Насриддинов, О. У. (2023, October). ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В MAPLE МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТЫ. In Conference on Digital Innovation:" Modern Problems and Solutions".

31. Насриддинов, О. (2023, October). РЕШЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ В ПРОГРАММЕ MAPLE. In Conference on Digital Innovation:" Modern Problems and Solutions".

32. Насриддинов, О. (2023, October). ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИМВОЛЬНОМ ПАКЕТЕ MAPLE. In Conference on Digital Innovation:" Modern Problems and Solutions".