International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-12| Issue-1| 2024 Published: |22-01-2024|

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТКИХ ЭФФЕКТОВ ПУТЕМ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА НА КУРСЕ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

https://doi.org/10.5281/zenodo.10629253

Б.А.Абдикамалов
А.С.Калилаев
Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Узбекистан, 2301000. э-почта: azamatkalilaev088@gmail.com

В статье изложены результаты изучения уравнения Клейна-Гордона (вывод уравнения, физический смысл его результатов) на курсе квантовая механика для студентов бакалавриата. Показано, что с педагогической точки зрения, уравнение Клейна-Гордона имеет несколько важных следствий. Изложены основные способы вывода уравнения, способа его решений и физические выводы, необходимые для более глубокого освоения физики. При этом обращается внимание на методы разделения переменных, где уравнение может быть разделено на пространственную и временную составляющие в связи с наличием определенной симметрии изучаемой системы. Отмечено, что система компьютерной алгебры Mathematica является подходящим средством решения уравнения Клейна-Гордона при рассмотрении ряда конкретных задач. Обращено внимание на выбор объектов исследования и способы их представления студенческой аудитории. Проведенные учебные занятия дали студентам глубокое и многогранное понимание ключевых принципов современной физики и можно считать, что они вооружают их фундаментальными знаниями, необходимыми для дальнейшего изучения продвинутой теоретической и экспериментальной физики.

Ключевые слова
уравнения Клейна-Гордона, Mathematica, уравнения Шредингера, Mathematica StackExchange.

Введение. В течение многих лет в Республике Узбекистан студенты-физики университетов изучают квантовую механику на 6 и 7 семестрах. Такая практика изучения сложного теоретического курса дала свои определенные положительные результаты. Как правило, в течение 6 семестра студенты изучают нерелятивистскую квантовую механику, а в течение 7 семестра предусмотрено изучения элементов релятивистской квантовой механики. При этом, большинство преподавателей обращают главное внимание на вывод и изучение уравнений Клейна-Гордона (Клейн-Гордон-Фок) и Дирака, их решения и конкретные следствия, вытекающие из них. Однако, как показывает изучение учебных программ отдельных вузов, единого мнения относительно глубины и последовательности изучения уравнения Клейна-Гордона, а также Дирака, естественно, существуют различные взгляды и педагогические подходы. Существуют даже мнения относительно целесообразности в бакалавриате релятивистской квантовой механики. Однако, как показывает многолетний педагогический опыт, изучение в бакалавриате физических основ релятивистской квантовой механики приводит к значительному прогрессу знаний студентов в процессе освоения фундамента всей физики.

Отметим, что уравнение Клейна-Гордона является релятивистским волновым уравнением, описывающее поведение бесспиновых частиц [1. стр. 53]. Это уравнение является волновым уравнением, учитывающим эффекты специальной теории относительности. С педагогической точки зрения, уравнение Клейна-Гордона имеет несколько важных следствий. Во-первых, оно более наглядно предсказывает, что эти частицы могут обладать как положительной, так и отрицательной энергией. В то же время уравнение Шредингера предсказывает только положительные энергетические решения. Во-вторых, уравнение Клейна-Гордона предсказывает генерацию и аннигиляцию частиц, что является необходимым следствием специальной теории относительность.

Уравнение Клейна-Гордона использовалось для изучения множества бесспиновых частиц и для разработки квантовой теории поля, являющейся современной теорией физики элементарных частицю

Считаем целесообразным изучение нижеперечисленных моментов при изучении релятивистской квантовой механики:

Уравнение Клейна-Гордона предсказывает существование решений с отрицательной энергией. Это был удивительный результат, и он привел к разработке уравнения Дирака, которое является более полным релятивистским волновым уравнением для частиц со спином 1/2. Уравнение Клейна-Гордона, которое является фундаментальным уравнением в физике, предсказывает, что бесспиновые частицы могут создаваться и аннигилировать. Это необходимое следствие специальной теории относительности, и оно было подтверждено экспериментами. Уравнение было использовано для разработки современной квантовой теории поля. Приведенные факты, которые представляются студентам при начальном

International Journal of Education, Social Science & Humanities. Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-12| Issue-1| 2024 Published: |22-01-2024|

ознакомлении с уравнением Клейна-Гордона,должны быть интерпрированы соответствующими математическими вкладками в зависимости от уровня подготовленности студенческой аудитории.

К сожалению, специальные научно-исследовательские работы по методике изложения проблем, связанных с уравнением Клейна-Гордона, для студентов университетов, по-видимому, отсутствуют. Однако, следует обратить внимание на ряд исследовательских статей, в которых обсуждается уравнение Клейна-Гордона в контексте квантовой механики [2. стр.6, 3. стр.12, 4. стр.9].

Вывод уравнения и разбор его содержания. Сущесивуют в основном два способа вывода уравнение Клейна-Гордона. Однако, при этом не следует обращать внимание студентов на исторический контекст вопроса. Так, первое релятивистское волновое уравнение было введено в 1926 году одновременно Клейном, Гордоном, Кударем, Фоком и др. [3. стр.12]. Сам Шредингер сформировал это ранее в своей статье [5. стр.9]. Как показывает опыт, при преподавании квантовой механики следует выводить уравнения Клейна-Гордона как обобщение уравнения Шредингера

$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi.$

При этом следует пользоваться релятивистским соотношением между энергией и импульсом частицы, которое пишется как $E^2 = (\boldsymbol{p}c)^2 + (mc^2)^2$. Здесь следует обращать особое внимание на тот факт, что масса m является релятивистским инвариантом и не зависит от скорости [6. стр.542]. Далее используется соотношение энергии и импульса и длина волны Де Бройля для релятивистской частицы, которое позволяет нам вывести формулу:

$\mathrm{E}^2\Psi = \mathrm{c}^2\hbar^2\nabla^2\Psi + (mc^2)^2\Psi.$

На основе полученных выражений и после соответственного сокрощения получается искомое уравнение Клейна-Гордона:

$$\left(\square + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0.$$

В отличие от уравнения Шредингера, уравнение Клейна-Гордона инвариантно относительно преобразованиям Лоренца и, поэтому, является подходящим кандидатом для релятивистского квантово-механического уравнения. Однако, у него есть некоторые существенные недостатки, которые затрудняют его правильную физическую интерпретацию. Здесь важно подчеркнуть, что уравнение включает как вторые, так и первые производные по времени. Следовательно, для того, чтобы решить уравнение для

International Journal of Education, Social Science & Humanities.
Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-12| Issue-1| 2024 Published: |22-01-2024|

некоторого ψ при $t > 0$, необходимо знать как ψ, так и $\partial_t\psi$ при $t = 0$. Здесь проявляется наличие дополнительной степени свободы уравнения Клейна-Гордона. Видно, что рассматриваемое уравнение не учитывает спин частицы и, поэтому, оно применимо только для скалярных частиц.

Изложение вопросов решения уравнения Клейна-Гордона для студентов. Естественно, решение рассматриваемого уравнения для конкретной поставленной задачи является сравнительно сложной задачей. В результате для преподавателя формируется достаточно сложная проблема выбора содержания и метода для поиска решений в различных условиях и контекстах. Здесь в первую очередь следует обратить внимание на методы разделения переменных (при рассмотрении систем с определенными симметриями), где уравнение может быть разделен на пространственную и временную составляющие. Другие методы, как решения для плоских волн, квантование поля, являющийся фундаментальным в физике элементарных частиц и квантовой теории поля, функциональный метод Грина, преобразование Фурье, численные методы и др. следует изучать в ходе более продвинутых курсов теоретической физики. Следует подчеркнуть, что выбор метода зависит от конкретной изучаемой задачи, граничных условий и желаемого уровня точности.

Интересно отметить, что система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica использовалась для решения уравнения Клейна-Гордона. Так, страница Wolfram Mathworld, посвященная уравнению Клейна-Гордона, содержит подробное математическое уравнения [7.8.9]. В сообщении на Mathematica StackExchange обсуждается попытка решить уравнение Клейна-Гордона с помощью Mathematica. Книга Таллера “Продвинутая визуальная квантовая механика” включает в себя программные пакеты Mathematica для численного решения уравнения Клейна-Гордона [10.стр 402]. Следует учесть, что хотя в этих работах обсуждается использование Mathematica для решения уравнения Клейна-Гордона, специфика решений может зависеть от конкретной формы уравнения и любых связанных с ним граничных условий. Использование системы Mathematica в ходе учебного процесса дало свои положительные эффекты.

Выбор объектов исследования и способы их представления студенческой аудитории. Естественно, знакомя студентов-физиков с уравнением Клейна-Гордона, полезно начать с самых простых и наиболее физически значимых решений, чтобы сформировать фундаментальное понимание. На основе накопленного опыта преподавания можно показать

International Journal of Education, Social Science & Humanities. Finland Academic Research Science Publishers
ISSN: 2945-4492 (online) | (SJIF) = 7.502 Impact factor
Volume-12| Issue-1| 2024 Published: |22-01-2024|

несколько ключевых решений уравнения Клейна-Гордона, которые следует представлять на лекциях и практических занятиях:

Решения для свободных частиц, где скалярное поле $\Psi(x^{\mu})$ принимает форму

$$\Psi(x^{\mu}) = Ae^{i(k^{\mu}x^{\mu}-\omega t)},$$

где А-амплитуда, k^{μ} –4-вектор энергии-импулса. При решения описывают свободное частицы с определенными импульсами и энергией.

Квантование поля. Здесь следует обратить главное внимание на то, что уравнение Клейна-Гордона описывает квантовое поле, а его решения представляют состояния частиц. При этом необходимо ознакомить студентов с концепцией операторов создания a_k^{+} и уничтожения a_k, которые создают и разрушают частицы с импульсом k^{μ}. Эти операторы воздействуют на состояние вакуума $|0\rangle$ для генерации состояний частиц.

Следует обратить внимание также на такие вопросы, как нормировка решений для плоских волн (что необходимо для обеспечения сохранения вероятности), представление позиционного пространства, интерпретация решений с отрицательной энергией, сохранение вероятностного тока и др. Отметим, что все перечисленные решения обеспечивают студентам прочную основу для понимания основных принципов уравнения Клейна-Гордона, поведения скалярных частиц в квантовой теории поля значения релятивистских эффектов в физике элементарных частиц. Они формируют основу для более продвинутых разделов релятивистской квантовой механики и квантовой теории поля.

Полученные результаты.

Углубленная и подробная лекция по изучению уравнения Клейна-Гордона может предоставить студентам университетов широкий спектр знаний по физике. Различные виды использованных способов проверки знаний студентов дали несколько существенных результатов. Во-первых, сущность специальной теории относительности. Во-вторых, более глубокое понимание нерелятивистской квантовой механики, включая корпускулярно-волновой дуализм, амплитуды вероятности и квантование энергии и импульса, которые являются важными понятием для понимания уравнения Клейна-Гордона. В третьих, введение в релятивистскую квантовую механику, которая наглядно продемонстрировала ограничения нерелятивистской квантовой механики, особенно при работе с частицами высоких энергий.

Отметим, также, вывод уравнения Клейна-Гордона из релятивистских соотношений между энергии и импульса подчеркивал его ковариантную природу и связь со специальной теорией относительности. Кроме того, студенты осознали роль уравнения Клейна-Гордона в квантовой теории поля, служащего основой для понимания поведения квантовых полей и частиц в физике высоких энергий и изученные материалы оказались подготовкой к углубленным темам по физике элементарных частиц, космологии и теоретической физике.

В целом, как показал опыт, проведенные учебные занятия (лекции и семинары) дали студентам глубокое и многогранное понимание ключевых принципов современной физики и можно считать, что они вооружают их фундаментальными знаниями, необходимыми для дальнейшего изучения продвинутой теоретической и экспериментальной физики.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Учебное пособие для вузов. В 10 т. Т.IV. В.Б.Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П.Питаевский. Квантовая электродинамика. – 4-е издание, исправленное. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2002. 720 с.

2. Nauman Raza, Saima Arshed, Asma Rashid Butt, Dumitru Baleanu. New and More Solitary Wave Solutions for the Klein-Gordon-Schrödinger Model Arising in Nucleon_Meson Interaction. Front.Phys., 12 April 2021. Sec. Statistical and Computational Physics Volume 9. 2021.

3. I.Semoradova. Quantum Mechanics of Klein-Gordon equation. Master Thesis. dp mf 16 Semoradova.pdf (cvut.cz)

4. Brett Altschul. Single-particle quantum mechanics of the free Klein-Gordon equation with Lorentz violation. The European Physical Journal Plus volume 138, Article number: 648 (2023).

5. E.Schrdinger. Quantisierung als eigenwertproblem. Annalen der physik, 385(13):437-490, 1926.

6. Л.Б.Окунь. Успехи физических наук. Том 178. №5. 541-555.

7. Klein-Gordon Equation – from Wolfram Mathworld. https://mathworld.wolfram.com/Klein-GordonEquation.htm.

8. Trying to solve Klein-Gordon equation – Mathematica Stack Exchange.

https://mathematica.stackexchange.com/equestions/289324/trying-to-solve-klein-gordon-equationl.

9.https://methematica.stackexchange.com/questions/149072/mathematica-packages-for-numerically-solving-the-klein-gordon-and-dirac-equation.

10. Bernd Thaller. Advanced Visual Quantum Mechanics. Springer. 2005. 518 p.